Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2015 год, Брянск

1. В контейнере находятся изделия нескольких типов из пяти возможных: весом 1 кг, 2 кг, 3 кг, 5 кг и 10 кг. Суммарный вес изделий в контейнере равен 100 кг. Известно, что если выбрать из контейнера по одному изделию каждого из имеющихся в нём типов, то их суммарный вес будет равен 15 кг. Количество самых тяжёлых из находящихся в контейнере изделий на 5 больше, чем количество всех остальных изделий в нём. Определите, какие типы изделий и в каком количестве находятся в контейнере.

По два изделия весом 2 и 3 кг, девять изделий весом 10 кг

2. Решите уравнение

$$\left|\log_2 \frac{x}{2}\right|^3 + |\log_2 2x|^3 = 28.$$

$4, \frac{1}{4}$

3. Найдите наибольшее натуральное число, не превосходящее 2015, такое, что при умножении на 5 сумма его цифр (в десятичной записи) не меняется.

2007

4. Окружность касается одной из сторон угла с вершиной A в точке B и пересекает вторую сторону в точках C и D, причём AD в три раза меньше AC. Косинус угла A равен $\sqrt{3}/4$.

а) Найдите отношение $BC : BD$.

б) Найдите отношение радиуса окружности к BD.

а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{\frac{10}{13}}$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin x + \sin^2 y - \sin^2 x \cos^2 y = 1, \\ 2\cos^2 x + 4\sin x - \cos^3 y = 5. \end{cases}$$

$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi + 2\pi k\right)$, $n, k \in \mathbb{Z}$