

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2010 год, Брянск

1. Ваня налил себе полный стакан смеси кофе с молоком. Сначала, выпив половину смеси, он долил в стакан доверху кофе и перемешал. Затем, выпив половину новой смеси, долил в стакан доверху молоко и вновь перемешал. Доля кофе в полученной смеси оказалась равной доле кофе в исходной. Найдите эту долю.

$\frac{8}{11}$

2. Решите неравенство

$$\log_{x^2 + \frac{1}{x^2}} \left(x - \frac{1}{x} \right) > \log_{x + \frac{1}{x}} \left(x - \frac{1}{x} \right).$$

$\left(\frac{7}{9^{\sqrt{1}}; 1} \right)$

3. Один из корней квадратного уравнения $px^2 + qx + 1 = 0$ ($p < 0$) равен 2010. Решите неравенство

$$x + q\sqrt{x} + p > 0.$$

$\frac{20107}{1} < x$

4. Точка B лежит на отрезке AC так, что $AB = 3$, $BC = 4$. На отрезках AB и BC по одну сторону от прямой AC построены квадраты. Окружности, описанные вокруг этих квадратов, пересекаются в точке D , отличной от B . Найдите площадь треугольника ACD .

$\frac{25}{16}$

5. При каких значениях x число

$$\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{3-x}$$

является целым?

$\frac{6}{9^{\sqrt{01}} \mp 1} \cdot 9^{\sqrt{1}} \mp 1$

6. Для каких из перечисленных значений параметра a ($a = -1, 2010, \log_2 3$) найдётся такое значение b , что уравнение

$$\cos x + \cos ax = b$$

имеет единственное решение?

$\log_2 3$