Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2014 год, Москва

1. В периодической десятичной дроби 0,242424… первую цифру после запятой заменили на 4. Во сколько раз полученное число больше исходного?

2. Найдите все значения y, при каждом из которых ни одно значение x, удовлетворяющее неравенству

$$\log_2(|x| + |y|) \leqslant 2,$$

не удовлетворяет неравенству

$$\log_{\frac{1}{2}}(|x| + |y + 4|) \geqslant -2.$$

3. Окружность радиуса 1 проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает стороны AC и BC в точках M и K соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = \sqrt{3}$, $MK = 1$, а центр окружности находится внутри треугольника ABC на расстоянии 5 от точки C.

4. Определите минимальное значение величины $|x + y|$ при условии, что числа x и y удовлетворяют соотношению

$$5\cos(x + 4y) - 3\cos(x - 4y) - 4\sin(x - 4y) = 10.$$

5. Одно основание правильной n-угольной призмы ($n \geqslant 3$) имеет n общих точек со сферой радиуса 3; другое основание имеет с этой сферой одну общую точку. Какие значения может принимать объём призмы?

Ответы

1. В $\frac{73}{40}$ раз.

2. $(-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$.

3. $6\sqrt{3}$.

4. $\frac{\pi}{8} - \frac{3}{8} \arccos \frac{3}{5}$.

5. Задачу можно понять двояко. Если считать, что n фиксировано, тогда $0 < V \leqslant 16n \sin \frac{2\pi}{n}$. Если же n произвольно, то $0 < V < 32\pi$. При обеих трактовках условия задача засчитывалась как верно решённая.