Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2014 год, Челябинск

1. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $b_1, b_2, b_3, \ldots$ равна 60, сумма квадратов членов этой прогрессии равна 1200. Найдите сумму новой бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой первый член равен b_1, а знаменатель отличается от знаменателя исходной геометрической прогресии только знаком.

2. Решите неравенство
$$(\log_5 x)^{\log_3 \log_2 x} + (\log_2 x)^{\log_3 \log_5 x} > 2.$$

3. В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Известно, что $2 \cdot AO = 7 \cdot OA_1$, $BO = 2 \cdot OB_1$. Найдите отношение высоты, опущенной из точки A, к радиусу вписанной в треугольник ABC окружности.

4. Заданы 2014 натуральных чисел. Если выбрать из них любые 100 чисел, то среди них окажется хотя бы одно чётное число. Если выбрать из них любые 1916 чисел, то среди них окажется хотя бы одно нечётное число. Может ли сумма всех этих чисел равняться $2014 \cdot 2013$? Ответ обоснуйте.

5. Найдите все значения a, при которых расстояние между любыми соседними корнями уравнения
$$3 \operatorname{tg} a \cdot \cos 2x + 3\sqrt{2} \cos 3a \cdot \cos x + 3 \operatorname{tg} a - \operatorname{ctg} a = 0$$
меньше либо равно $\pi/2$.

Ответы

1. 20.

2. $(1;2) \cup (5;+\infty)$.

3. $9/2$.

4. Не может.

5. $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.