Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2014 год, Чебоксары

1. Дана бесконечная числовая последовательность a_1, a_2, $\ldots$, о которой известно следующее: $a_1 = 20$, $a_{n+1} = a_n a_{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите все значения, которые может принимать a_{2014}.

2. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Биссектрисы внутренних углов треугольника при вершинах A и B пересекают описанную окружность в точках A_1 и B_1 соответственно. Угол между биссектрисами равен 60°. Длина стороны AB равна 3. Найдите площадь треугольника A_1B_1O.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых среди решений уравнения

$$\left(a^4 + 2014a^3 + 2014a^2 + 2014a + 2013\right) x = a^3 + 3a^2 - 6a - 8$$

есть неотрицательные числа.

4. Решите уравнение

$$\frac{\cos 5x + \cos x}{\cos 4x + \cos 2x} = \frac{1 + \cos 4x}{\cos x}\,.$$

5. На основании прямого кругового конуса расположны три попарно касающихся друг друга шара одинакового радиуса. Каждый из них касается также боковой поверхности конуса. Четвёртый шар того же радиуса касается первых трёх и боковой поверхности конуса. Найдите объём конуса, если радиус окружности, образованной точками касания четвёртым шаром боковой поверхности конуса, равен $\sqrt{2}$.

Ответы

1. 0 или $1/20$.

2. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

3. $(-2013; -4] \cup \{-1\} \cup [2; +\infty)$.

4. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. $\frac{\pi}{6}\left(3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}\,\right)^3$.