

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2013 год, вариант 5

1. Найдите все пары натуральных чисел $x, y \in [1; 8]$, удовлетворяющих равенству

$$\sqrt{xx, xxx \dots} = y, yyy \dots$$

(десятичная запись каждого из чисел $xx, xxx \dots$ и $y, yyy \dots$ состоит из бесконечного количества одинаковых цифр).

2. Решите уравнение

$$\left| \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 2 \right| - \left| \log_2 x + 2 \right| = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x.$$

3. В окружность радиуса 3 вписаны треугольники ABC и AMN . При этом прямая AM проходит через середину E отрезка BC , а прямая BN — через середину F отрезка AC . Найдите периметр треугольника ABC , если $AM : AE = 2 : 1$ и $BN : BF = 17 : 13$.

4. Выясните, сколько корней имеет уравнение

$$\left(21x - 11 + \frac{\sin x}{100} \right) \cdot \sin(6 \arcsin x) \cdot \sqrt{(\pi - 6x)(\pi + x)} = 0.$$

5. Квадрат со стороной 12 требуется разрезать (полностью) на четыре квадрата с целочисленной стороной a , три квадрата с целочисленной стороной b и десять прямоугольников со сторонами a и b . Найдите все значения a и b , при которых это возможно.

Ответы

1. $(1, 3)$ и $(4, 6)$.

2. $(0; \frac{1}{4}] \cup \{1\}$.

3. $\frac{72}{5}$.

4. 7 корней.

5. $a = 2$, $b = 4$.