

## Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2012 год, Екатеринбург. 2

1. Рассеянный Вася на полпути от школы до дома обнаружил, что оставил в школе портфель. В этот момент он встретил двух друзей. Первый был на мотоцикле и мог отвезти Васю до школы, но тогда бы домой Васе нужно было идти пешком. Второй был на велосипеде и мог отвезти Васю до школы и обратно до самого дома, но прежде, чем посадить пассажира на велосипед, ему нужно было подкачать колёса. За время подкачки колёс мотоциклист как раз доедет до школы. С кем из друзей поехать Васе, чтобы взять портфель и как можно быстрее попасть домой, если он проходит половину пути от школы до дома за то же время, за которое велосипедист проезжает  $7/9$  этого пути?

2. Решите неравенство

$$||2 + x - x^2| - |x + 1|| \geq |x^2 - 2x - 3|.$$

3. В четырёхугольнике  $ABCD$  угол  $A$  равен  $88^\circ$ , угол  $B$  равен  $122^\circ$ ,  $CD = 2$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $CKD$ , где  $K$  — точка пересечения биссектрис углов  $C$  и  $D$ , и сравните этот радиус с  $1,04$ .

4. Решите уравнение

$$\frac{27x - 24}{2x + \sqrt{4x^2 - 3}} - \frac{36x - 32}{\sqrt{4x^2 - 3} + \sqrt{4x^2 + 1}} = 9x^2 - 26x + 16.$$

5. Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2012}$  — арифметическая прогрессия с разностью  $d$ , причём  $\cos \alpha_k \neq 0$  для всех  $k = 1, 2, \dots, 2012$  и

$$\frac{1}{\cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2} + \frac{1}{\cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_3} + \dots + \frac{1}{\cos \alpha_{2011} \cdot \cos \alpha_{2012}} = 0.$$

Найдите все возможные значения  $d$ , не превосходящие по модулю  $\pi$ .

## Ответы

1. Быстрее на велосипеде.
2.  $\{-1\} \cup [2; +\infty)$ .
3.  $\sqrt{6} - \sqrt{2} < 1,04$ .
4.  $\frac{8}{9}, \frac{2+\sqrt{13}}{3}$ .
5.  $\frac{\pi n}{2011}, n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 2010$ .