Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2011 год, Москва

1. Для нумерации всех парковочных мест на стоянке (подряд от первого до последнего) рядом с каждым местом был установлен его номер, составленный из табличек, на каждой из которых написано по одной цифре. В общей сложности было использовано 2148 табличек. Сколько мест на парковке? Каких цифр было использовано больше всего, а каких — меньше всего?

2. Решите уравнение
$$\sin(\sin x) = \sin(\cos x + 1).$$

3. Через одну вершину трапеции проведены две прямые. Одна из них проходит также через противоположную вершину трапеции и делит отрезок, соединяющий середины её оснований, в отношении $3:1$. В каком отношении делит этот отрезок другая прямая, делящая площадь трапеции пополам?

4. Решите систему
$$\begin{cases} \dfrac{9 - 4^{y+1} - 3^x \cdot 2^{y+2} - 9^x}{4^{y+1} + 3^x \cdot 2^{y+1} - 3^{x+1} - 9} = \dfrac{3^x + 2^{y+1} - 3}{3^x - 1}, \\ 3^{x-1} \cdot 2^{y+1} = 1. \end{cases}$$

5. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение
$$x^3 - ax^2 - (a^3 - 6a^2 + 5a + 8)x - (a-3)^3 = 0$$
имеет три различных корня, образующих геометрическую прогрессию (укажите эти корни).

Ответы

1. 752 места. Больше всего использовано 1 и 2 (поровну). Меньше всего 0, 8, 9 (поровну).

2. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. $1 : 1$ или $4 : 3$.

4. $(1, -1)$.

5. Если $a = 2$, то $x \in \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, -1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$; если $a = 4$, то $x \in \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.