Объединённая межвузовская математическая олимпиада (ОММО)

11 класс, 2023 год

Задача 1. Точка R_1 — середина отрезка ST; точка R_2 — середина отрезка SR_1; для каждого $n \geqslant 3$ точка R_n — середина отрезка $R_{n-2}R_{n-1}$. Пусть R — предельное положение точки R_n при $n \to \infty$. Найдите длину отрезка RT, если длина отрезка ST равна 15.

$\boxed{10}$

Задача 2. При каком наименьшем n можно покрасить каждое натуральное число в один из n цветов так, чтобы любые два числа, отличающиеся на 5, на 8, на 10, на 13 и на 18, были покрашены в разные цвета?

Задача 3. На заводе имеются в достаточном количестве три сплава титана, алюминия и молибдена. Все сплавы с примесями. Процентное содержание компонентов в этих сплавах приведено в таблице.

	1	2	3
Молибден	8%	3%	8%
Титан	36%	21%	6%
Алюминий	55%	76%	15%

Из этих сплавов необходимо приготовить новый сплав, в котором алюминия должно быть не больше 38%, а молибдена — не меньше 5%. Какое наибольшее и какое наименьшее содержание титана (в процентах) может быть в этом сплаве?

$\boxed{6 \text{ и } 23{,}25}$

Задача 4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 9$, $BC = 2$ и боковыми сторонами $AB = 5$, $CD = 3\sqrt{2}$. Точка P на прямой BC такова, что периметр треугольника APD наименьший из возможных. Найдите этот периметр.

$\boxed{9 + \sqrt{117}}$

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^{10} + x_2^{10} + \ldots + x_{92}^{10} = 3^{10} \\ x_1^{33} + x_2^{33} + \ldots + x_{92}^{30} = 3^{33}. \end{cases}$$

Задача 6. Укажите все значения параметра a, $|a| < 1$, при которых множество решений неравенства

$$\frac{|\cos t - a| - \sin t}{\left|\cos t - \frac{3}{4}\right|} > 0$$

для $t \in (0; \pi)$ представимо в виде двух непересекающихся интервалов.

$\boxed{\left[\frac{3-\sqrt{7}}{4}, 1\right)}$

Задача 7. Дано действительное число t, отличное от 0, 1, -1, $\frac{1}{2}$ и 2. Решите уравнение

$$\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2} = \frac{(t^2-t+1)^3}{t^2(t-1)^2}.$$

Ответ может зависеть от t.

Задача 8. В треугольнике ABC точки A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB, а A_1, B_1, C_1 — точки касания этих сторон со вписанной окружностью соответственно. Прямые A_1C_1, B_1C_1 пересекают A_0B_0 в точках X и Y. Докажите, что прямая CC_1 делит отрезок XY пополам.

Задача 9. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых существует такое вещественное число a, что при всех вещественных x, y выполнено равенство

$$2f(xy+3) = f(x)f(y) - f(x) - 2y + a.$$

Задача 10. В группе из 80 человек некоторые знакомы друг с другом (знакомства взаимны). Известно, что в группе есть человек, который знает ровно 1 из оставшихся, человек, который знает ровно 2 из оставшихся, …, человек, который знает ровно 54 из оставшихся. Докажите, что в группе есть три человека, каждые два из которых знакомы.