Объединённая межвузовская математическая олимпиада (ОММО)

11 класс, 2021 год

Задача 1. Сумма первых трёх членов арифметической прогрессии, а также сумма первых шести её членов — натуральные числа. Кроме того, её первый член d_1 удовлетворяет неравенству $d_1 \geqslant \frac{1}{2}$. Какое наименьшее значение может принимать d_1?

Задача 2. Даша написала на доске числа 9, 10, 11, …, 22, а потом стёрла одно или несколько из них. Оказалось, что оставшиеся на доске числа нельзя разбить на несколько групп так, чтобы суммы чисел в группах были равны. Какое наибольшее значение может иметь сумма оставшихся на доске чисел?

Задача 3. В хирургическом отделении 4 операционных: I, II, III и IV. Утром они все были пусты. В какой-то момент началась операция в операционной I, через некоторое время — в операционной II, ещё через некоторое время — в III, а потом и в IV.

Закончились все четыре операции одновременно, и суммарная их продолжительность составила 2 часа 32 минуты. За 30 минут до момента завершения всех операций суммарная продолжительность уже идущих составляла 52 минуты, а ещё за 10 минут до этого — 30 минут. Продолжительности операций в каких операционных можно определить по этим данным, а в каких — нельзя?

Задача 4. В треугольнике ABC длины сторон равны 4, 5 и $\sqrt{17}$. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех и только тех точек X внутри треугольника ABC, для которых выполняется условие $XA^2 + XB^2 + XC^2 \leqslant 21$.

Задача 5. Решите уравнение: $4\left(x^4 + 3x^2 + 3\right)\left(y^4 - 7y^2 + 14\right) = 21$.

Задача 6. Вычислите

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{43} + \operatorname{tg}\frac{2\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{3\pi}{43} + \ldots + \operatorname{tg}\frac{k\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{43} + \ldots + \operatorname{tg}\frac{2019\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{2020\pi}{43}.$$

Задача 7. При каком наибольшем значении параметра a коэффициент при x^4 в разложении многочлена $\left(1 - 2x + ax^2\right)^8$ будет равен -1540?

Задача 8. Дан равнобедренный треугольник KLM ($KL = LM$) с углом при вершине, равным 114°. Точка O расположена внутри треугольника KLM так, что $\angle OMK = 30^\circ$, а $\angle OKM = 27^\circ$. Найдите величину угла $\angle LOM$.

Задача 9. Функция g определена на целых числах и принимает целые значения, причём $g(x) \neq x$ для каждого целого x. Назовём число a *красивым*, если для любого целого числа x выполнено $g(x) = g(a - x)$. Может ли каждое из чисел 739 и 741 быть красивым?

Задача 10. Вася смастерил из стеклянных стержней призму. Призма имеет 171 боковое ребро и столько же рёбер в каждом из оснований. Вася задумался: «Можно ли параллельно перенести каждое из 513 рёбер призмы так, чтобы они образовали замкнутую ломаную в пространстве?» Возможна ли реализация Васиной задумки?