

# Объединённая межвузовская математическая олимпиада (ОММО)

11 класс, 2020 год

**Задача 1.** Дан многочлен  $F(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 100x^{99}$ . Можно ли, переставив коэффициенты в нём, получить многочлен  $G(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 + \dots + g_{99}x^{99}$  такой, что для всех натуральных чисел  $k \geq 2$  разность  $F(k) - G(k)$  не кратна 100?

**Задача 2.** При каком наименьшем  $n$  существуют  $n$  чисел из интервала  $(-1; 1)$ , таких, что их сумма равна 0, а сумма их квадратов равна 30?

**Задача 3.** Пункты  $A$  и  $B$ , находящиеся на кольцевой аллее, соединены прямолинейным отрезком шоссе длиной 4 км, являющимся диаметром кольцевой аллеи. Из пункта  $A$  из дома по аллее вышел на прогулку пешеход. Через 1 час он обнаружил, что забыл ключи, и попросил соседа-велосипедиста поскорее привезти их. Через какое минимальное время он может получить ключи, если скорость велосипедиста на шоссе равна 15 км/ч, на аллее — 20 км/ч, а скорость пешехода — 6 км/ч? Пешеход может идти навстречу велосипедисту.

Чёрт

**Задача 4.** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу  $AB$  в точке  $E$ . Через точку  $E$  проведена касательная к окружности, которая пересекает катет  $CB$  в точке  $D$ . Найдите длину  $DB$ , если  $AE = 6$ , а  $BE = 2$ .

2

**Задача 5.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 12x^2 + 4xy + 3y^2 + 16x = -6, \\ 4x^2 - 12xy + y^2 + 12x - 10y = -7. \end{cases}$$

$\frac{2}{1} = 8 : \frac{1}{8} = x$

**Задача 6.** Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$4 \sin(3x) + 13 \cos(3x) = 8 \sin(x) + 11 \cos(x).$$

$\frac{11}{8} \arctg = \arctg \frac{13}{4} \arctg = \arctg 1,1651, 1910 \approx \frac{2}{8}$

**Задача 7.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $x^3 - 11x^2 + ax - 8 = 0$  имеет три различных действительных корня, образующих геометрическую прогрессию?

22 = a

**Задача 8.** Про тетраэдр  $PQRS$  известно, что  $PQ = 4$ ,  $SR = 6$ ,  $\angle QRS = \angle PSR = 50^\circ$ ,  $\angle QSR = \angle PRS = 40^\circ$ . Вокруг тетраэдра описана сфера. Рассмотрим на этой сфере множество всех точек, сумма сферических расстояний от которых до точек  $P, Q, R, S$  не меньше  $6\pi$ . Чему равна площадь этого множества? Сферическое расстояние между двумя точками на сфере — длина наименьшей дуги окружности большого круга, соединяющей эти точки.

□81

**Задача 9.** Про функции  $p(x)$  и  $q(x)$  известно, что  $p(0) = q(0) > 0$  и  $p'(x)\sqrt{q'(x)} = \sqrt{2}$  для любого  $x \in [0; 1]$ . Докажите, что если  $x \in [0; 1]$ , то  $p(x) + 2q(x) > 3x$ .

**Задача 10.** Пете необходимо спаять электрическую схему, состоящую из 10 чипов, соединённых между собой проводами (один провод соединяет два различных чипа; два чипа может соединять не более одного провода), при этом из одного чипа должно выходить 9 проводов, из одного — 8, из одного — 7, из двух — по 5, из трёх — по 3, из одного — 2, из одного — 1. Может ли Петя спаять такую схему?