

Объединённая межвузовская математическая олимпиада (ОММО)

11 класс, 2018 год

Задача 1. Докажите неравенство

$$\log_{2015} 2017 > \frac{\log_{2015} 1 + \log_{2015} 2 + \dots + \log_{2015} 2016}{2016}.$$

Задача 2. n грибников ходили в лес и принесли суммарно 200 грибов (возможно, некоторые из грибников не принесли домой ни одного гриба). Мальчик Петя, узнав об этом, заявил: «Какие-то двое из них обязательно принесли одинаковое количество грибов!» При каком наименьшем n мальчик Петя наверняка окажется прав? Не забудьте обосновать свой ответ.

21

Задача 3. Вася хочет найти все целые числа a такие, что выражение $10n^3 - 3n^5 + 7an$ делится на 15 для всех целых n . Какие остатки может давать число a при делении на 15? Укажите все возможные ответы или докажите, что таких целых чисел a нет.

$a = 0$

Задача 4. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AD в точке K . Найдите площадь трапеции, если $AK = 16$, $DK = 4$ и $CD = 6$.

432

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = (y - z)^2 - 3, \\ y^2 = (z - x)^2 - 7, \\ z^2 = (x - y)^2 + 21. \end{cases}$$

$(1, 3, 5)$ и $(-1, -3, -5)$

Задача 6. Изобразите (с обоснованием) на координатной плоскости Oxy множество решений неравенства

$$(y^2 - \arcsin^2(\sin x)) \left(y^2 - \arcsin^2 \left(\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right) \right) \left(y^2 - \arcsin^2 \left(\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right) \right) < 0.$$

Задача 7. Точки A_1 , B_1 , C_1 — точки пересечения продолжений высот остроугольного треугольника ABC с описанной вокруг ABC окружностью. Окружность, вписанная в треугольник $A_1B_1C_1$, касается одной из сторон ABC , а один из углов треугольника ABC равен 40° . Найдите два других угла треугольника ABC .

08 и 09

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$3^{x^2-2ax+a^2} = ax^2 - 2a^2x + a^3 + a^2 - 4a + 4$$

имеет ровно одно решение?

1 = v

Задача 9. В десятичной записи чётного числа M участвуют только цифры 0, 2, 4, 5, 7 и 9, цифры могут повторяться. Известно, что сумма цифр числа $2M$ равняется 35, а сумма цифр числа $M/2$ равняется 29. Какие значения может принимать сумма цифр числа M ? Укажите все возможные ответы.

1E

Задача 10. Точки M , N и K расположены на боковых рёбрах AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ так, что $AM : AA_1 = 1 : 2$, $BN : BB_1 = 1 : 3$, $CK : CC_1 = 1 : 4$. Точка P принадлежит призме. Найдите наибольшее возможное значение объёма пирамиды $MNKP$, если объём призмы равен 16.

7