Объединённая межвузовская математическая олимпиада (ОММО)

11 класс, 2017 год

Задача 1. Представьте в виде несократимой дроби:

$$\frac{12+15}{18}+\frac{21+24}{27}+\ldots+\frac{48+51}{54}.$$

$\boxed{\frac{171}{20}}$

Задача 2. Андрей, Максим, Игорь и Коля соревновались в велогонке. На вопрос, кто какое место занял, они ответили:

Андрей: — Я не был ни первым, ни последним.
Максим: — Я не был последним.
Игорь: — Я был первым.
Коля: — Я был последним.

Известно, что три мальчика ответили честно и только один соврал. Кто из мальчиков соврал?

Игорь

Задача 3. Про натуральные числа x и y и целое нечётное число z известно, что

$$x!+y!=24z+2017.$$

Найдите все возможные такие тройки чисел (x,y,z).

$(1,4,-83)$; $(4,1,-83)$; $(1,5,-79)$; $(5,1,-79)$

Задача 4. Пусть L — точка пересечения диагоналей CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 3. Точка K такова, что $\overrightarrow{LK}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. Определите, лежит ли точка K внутри, на границе или вне $ABCDEF$, а также найдите длину отрезка KC.

Вне; $\sqrt{3}$

Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+2-4xy=0,\\ y+z+2-4yz=0,\\ z+x+2-4zx=0. \end{cases}$$

$(1,1,1)$; $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

Задача 6. Сравните числа $\frac{\sin 2016^\circ}{\sin 2017^\circ}$ и $\frac{\sin 2018^\circ}{\sin 2019^\circ}$.

Второе больше

Задача 7. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) боковая сторона равна 20 см, угол BAC равен $45°$. Пусть O — центр окружности, описанной вокруг $ABCD$. Оказалось, что прямые OD и AB перпендикулярны. Найдите длину основания AD трапеции.

$10\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ см

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$4^{|x-a|}\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-2x+4\right)+2^{x^2-2x}\log_{\sqrt{3}}\left(2|x-a|+3\right)=0$$

имеет ровно три решения?

$\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$

Задача 9. В первенстве по футболу участвует 20 команд, которые играют по разу друг с другом. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трёх команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?

90

Задача 10. В треугольной пирамиде $ABCD$ с основанием ABC боковые рёбра попарно перпендикулярны, $DA = DB = 2$, $DC = 5$. Из точки основания испускают луч света. Отразившись ровно по одному разу от каждой боковой грани (от рёбер луч не отражается), луч попадает в точку на основании пирамиды. Какое наименьшее расстояние мог пройти луч?

$\frac{10\sqrt{6}}{9}$