Объединённая межвузовская математическая олимпиада (ОММО)

9–10 классы, 2016 год

Задача 1. Вася и Маша поженились в 1994 году. С тех пор у них родились четверо детей, и новый 2015 год встречали уже все шестеро. По странному совпадению все дети родились 6 февраля, а сегодня, 7 февраля 2016 года, Вася заметил, что возраст старшего равен произведению возрастов трёх младших. Докажите, что в этой семье есть близнецы.

Задача 2. На доске написано число 27. Каждую минуту число стирают с доски и записывают на его место произведение его цифр, увеличенное на 12. Например, через минуту на доске будет написано число $2 \cdot 7 + 12 = 26$. А что окажется на доске через час?

14

Задача 3. Про действительные числа x, y, z известно, что

$$xy + z = yz + x = zx + y.$$

Докажите, что какие-то два из чисел x, y, z равны.

Задача 4. Трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD такова, что $AC = BC + AD$, а один из углов между прямыми AC и BD равен 60°. Докажите, что $ABCD$ — равнобокая трапеция.

Задача 5. У Пети имеется 50 шариков трёх цветов: красные, синие и зелёные. Известно, что среди любых 34 шариков есть хотя бы один красный; среди любых 35 — синий; среди любых 36 — зелёный. Сколько шариков зелёного цвета может быть у Пети?

15, 16 или 17

Задача 6. Найдите все действительные числа x такие, что оба числа $x + \sqrt{3}$ и $x^2 + \sqrt{3}$ — рациональные.

$\frac{1}{2} - \sqrt{3}$

Задача 7. На сторонах AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки F и E соответственно таким образом, что $AF/FD = BE/EC = AB/CD$. Продолжение отрезка EF за точку F пересекает прямую AB в точке P, а прямую CD — в точке Q. Докажите, что $\angle BPE = \angle CQE$.

Задача 8. Карлсон написал дробь $5/8$. Малыш может:

- прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно;
- умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число.

Сможет ли Малыш с помощью этих действий получить дробь, равную $3/5$?

Нет