Объединённая межвузовская математическая олимпиада (ОММО)

11 класс, 2016 год

Задача 1. Представьте в виде несократимой дроби

$$7\frac{19}{2015} \times 6\frac{19}{2016} - 13\frac{1996}{2015} \times 2\frac{1997}{2016} - 9 \times \frac{19}{2015}\,.$$

$\boxed{19/96}$

Задача 2. В 1ª классе каждого ребёнка попросили написать два числа: количество его одноклассников и количество его одноклассниц (именно в таком порядке; сам себя ребёнок не считает). Каждый ребёнок одно число написал правильно, а в другом ошибся ровно на 2. Среди ответов были получены такие: $(13, 11)$, $(17, 11)$, $(14, 14)$. Сколько мальчиков и сколько девочек в классе?

$\boxed{\text{15 мальчиков и 12 девочек}}$

Задача 3. При каких натуральных $n > 1$ найдутся n подряд идущих натуральных чисел, сумма которых равна 2016?

$\boxed{3,\ 7,\ 9,\ 21,\ 63}$

Задача 4. В треугольнике ABC с отношением сторон $AB : AC = 5 : 4$ биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке L. Найдите длину отрезка AL, если длина вектора $4\cdot\overrightarrow{AB}+5\cdot\overrightarrow{AC}$ равна 2016.

$\boxed{224}$

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 931. \end{cases}$$

$\boxed{(3;5);\ (5;3);\ (-3;-5);\ (-5;-3)}$

Задача 6. Вычислите $2\,\mathrm{arctg}\,2 + \arcsin\frac{4}{5}$.

$\boxed{\pi}$

Задача 7. Пусть OP — диаметр окружности Ω, ω — окружность с центром в точке P и радиусом меньше, чем у Ω. Окружности Ω и ω пересекаются в точках C и D. Хорда OB окружности Ω пересекает вторую окружность в точке A. Найдите длину отрезка AB, если $BD \cdot BC = 5$.

$\boxed{\sqrt{5}}$

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение $x^3+ax^2+13x-6=0$ имеет единственное решение?

$\boxed{(-\infty;-8)\cup\left(-\frac{20}{3};\frac{61}{8}\right)}$

Задача 9. Федерация спортивной борьбы присвоила каждому участнику соревнования квалификационный номер. Известно, что во встречах борцов, квалификационные номера которых отличаются более чем на 2 номера, всегда побеждает борец с меньшим номером. Турнир для 256 борцов проводится по олимпийской системе: в начале каждого дня бойцы разбиваются на пары, проигравший выбывает из соревнований (ничьих не бывает). Какой наибольший квалификационный номер может иметь победитель?

$\boxed{16}$

Задача 10. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, а высота — $a/2$. Найдите объём тела, ограниченного поверхностью этой пирамиды и сферами радиуса $a/3$ с центрами в вершинах основания этой пирамиды.

$\boxed{\frac{81-4\pi}{486}a^3}$