Объединённая межвузовская математическая олимпиада (ОММО)

11 класс, 2014 год

Задача 1. В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \geqslant 2$ выполняется равенство

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_n + x_{n+1}}{3}.$$

Найдите отношение $\dfrac{x_{2012} - x_{1006}}{x_{1006} - x_{503}}$.

$\boxed{2}$

Задача 2. Даны 2014 положительных чисел. Известно, что произведение любых тридцати пяти из них меньше единицы. Докажите, что произведение всех данных чисел меньше единицы.

Задача 3. Натуральное 59-значное число A записывается только цифрами 3, 4 и 5. При этом пятёрок на 8 больше, чем троек. Найдите остаток от деления числа A на 9.

$\boxed{1}$

Задача 4. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Точки M, N, P и Q — середины сторон AB, BC, CD и DE соответственно, точки H и K — середины MP и NQ соответственно. Найдите длину отрезка HK, если $AE = 7$.

$\boxed{\frac{7}{4}}$

Задача 5. Найдите все решения уравнения

$$\big(y(x-1)\big)^2 + (x-1)^2 + y^2 + 1 - 4y|x-1| = 0.$$

$\boxed{(1, 2);\ (1, 0)}$

Задача 6. Найдите все периодические функции $y = f(x)$, удовлетворяющие уравнению

$$f(x) - 0{,}5f(x - \pi) = \sin x.$$

$\boxed{f(x) = \frac{2}{3}\sin x}$

Задача 7. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а боковые стороны образуют угол 30°. Основания имеют длины 6 и 2. Найдите высоту трапеции.

$\boxed{\sqrt{3}}$

Задача 8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\big|\ln|x|\big| = ax$ имеет три решения.

$\boxed{\left(-\frac{1}{e}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{e}\right)}$

Задача 9. В городе 200 жителей. Часть из них — рыцари, которые всегда говорят правду, остальные — лжецы, которые всегда лгут. Каждый горожанин живет в одном из четырёх кварталов (А, Б, В и Г). Каждому задали четыре вопроса: «Вы живёте в квартале А?», «Вы живёте в квартале Б?», «Вы живёте в квартале В?», «Вы живёте в квартале Г?». На первый вопрос утвердительно ответили 105 жителей, на второй — 45, на третий — 85 и на четвёртый — 65. В каком квартале лжецов живет больше, чем рыцарей, и на сколько?

В квартале Б на 5

Задача 10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с рёбрами $AB = 3$, $AD = 4$ и $AA_1 = 5$ проведены два сечения — плоскостью, проходящей через диагональ A_1C, и плоскостью, проходящей через диагональ B_1D. Найдите наибольшее возможное значение суммы площадей поверхностей многогранников, на которые эти сечения разбивают данный параллелепипед.

194