Объединённая межвузовская математическая олимпиада (ОММО)

11 класс, 2013 год

Задача 1. Ученикам 11 «А» класса на выбор предложили пройти тестирование ровно по одному из предметов: химии, информатике или физике. Трое ребят приняли участие в тестировании по химии; более 40%, но менее половины учеников проходили тестирование по информатике и ровно треть — по физике. Сколько ребят участвовало в тестировании по информатике, если в классе присутствовали более 12 учеников?

$\boxed{7}$

Задача 2. Из Москвы на Международный шахматный турнир в Нью-Васюках шахматисты всех команд (одинаковых по численности) добирались двумя способами. Некоторые команды заняли все места в 5-местных и одной 2-местной каютах парохода «Повелитель бурь». Другие команды предпочли занять все места в 7-местных и одной 4-местной каютах дирижабля «Скрябин». Сколько спортсменов было в команде, если занятых 7-местных кают оказалось на одну больше, чем занятых 5-местных?

$\boxed{41 \text{ (или 1)}}$

Задача 3. Докажите, что число $2^{2014}+1$ можно представить в виде произведения трёх натуральных чисел, больших 1.

Задача 4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ прямые AD и BC перпендикулярны, а длина отрезка, соединяющего середины диагоналей BD и AC, равна 2013. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон CD и AB.

$\boxed{2013}$

Задача 5. Решить систему:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2\sin^2 y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

$\boxed{x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k,\ y = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ z = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ k, m, n \in \mathbb{Z}}$

Задача 6. Пусть

$$S_n = f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f(1).$$

Найдите S_{2013} для $f(x) = \frac{9^x}{9^x+3}$.

$\boxed{1007}$

Задача 7. На плоскости задана точка P. Рассматриваются различные равносторонние треугольники ABC, такие что $PA = 2$, $PB = 3$. Какое максимальное значение может принимать длина отрезка PC?

$\boxed{5}$

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение $2x^4 - 7ax + 5a^2 = 0$ имеет хотя бы один целый корень?

$\boxed{0;\ \pm 1;\ \pm\frac{2}{5}}$

Задача 9. Коробка конфет имеет форму правильной шестиугольной призмы со стороной основания 10 и высотой $5\sqrt{3}$. Из двух разных вершин коробки $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ одновременно с одной и той же скоростью начинают двигаться две мухи, меняя направление движения только в вершинах. Одна муха начинает движение в вершине A и двигается только по рёбрам призмы, другая — только по диагоналям оснований и боковых граней. Через некоторое время мухи встречаются. В каких вершинах коробки может произойти встреча?

$\boxed{A,\ C,\ E}$

Задача 10. Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ повёрнут на 90° вокруг прямой, проходящей через середины противоположных рёбер AD и B_1C_1. Найдите объём общей части исходного куба и повёрнутого.

$\boxed{\sqrt{2} - \frac{2}{3}}$