

Объединённая межвузовская математическая олимпиада (ОММО)

11 класс, 2012 год

Задача 1. На 100 мест за круглым столом посадили 50 мужчин и 50 женщин. Будем называть человека *довольным*, если у него есть сосед противоположного пола. Может ли отношение числа довольных мужчин к числу довольных женщин быть больше 1,9?

97

Задача 2. На первом складе в каждом ящике в среднем по 3 бракованных изделия, а на втором складе — по 6. С первого склада на второй перевезли 50 ящиков, и среднее количество бракованных изделий в ящике на каждом из складов уменьшилось на 1. Сколько всего ящиков на двух складах?

091

Задача 3. Найдите последнюю цифру числа $2 \cdot 7^{(2012^{2011})} + 5 \cdot 13^{(12^{11})}$.

2

Задача 4. Длина медианы AD треугольника ABC равна 3, длины сторон AB и AC — 5 и 7 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC .

9^9

Задача 5. Найдите сумму всех различных корней уравнения

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0,$$

принадлежащих интервалу $(0; \pi)$.

$\frac{9}{\pi^{11}}$

Задача 6. Решите систему

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = 1, \\ \frac{yz}{y+z} = 2, \\ \frac{xz}{x+z} = 3. \end{cases}$$

$(21, \frac{7}{12}, \frac{9}{12})$

Задача 7. (ОММО, 2012) Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет равенству

$$f(x+3) = x+2 - f(x),$$

а при $x \in [-3; 0)$ задаётся формулой $f(x) = x^2$. Найдите $f(2012)$.

9001

Задача 8. На одной из сторон острого угла с вершиной O взяты точки A и B , а на другой — точка C . При какой длине отрезка OC величина угла ACB максимальна, если $OA = 1$, $OB = 5$?

⊠

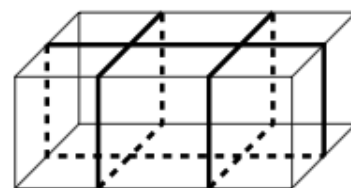
Задача 9. (ОММО, 2012) При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |x| + |y| + ||x| - |y|| = 6, \\ |x| + |y| = a \end{cases}$$

имеет наибольшее возможное число решений?

⊠

Задача 10. Посылка должна быть упакована в ящик в форме прямоугольного параллелепипеда и перевязана один раз вдоль и два раза поперёк (см. рисунок). Можно ли отправить посылку объёма 63 дм^3 , имея $4,32 \text{ м}$ веревки (толщиной стенок ящика и уходящей на узлы веревкой пренебречь)?



⊠