

## Московская математическая олимпиада

9 класс, 2024 год

1. Действительные числа  $a, b, c, d$  таковы, что

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{c}{d} + \frac{d}{c}.$$

Докажите, что произведение каких-то двух чисел из  $a, b, c, d$  равно произведению двух других.

2. На урок физкультуры пришло 12 детей, все разной силы. Учитель 10 раз делил их на две команды по 6 человек, каждый раз новым способом, и проводил состязание по перетягиванию каната. Могло ли оказаться так, что все 10 раз состязание закончилось вничью (то есть суммы сил детей в командах были равны)?

3. Петя загадал положительную несократимую дробь  $x = \frac{m}{n}$ . За один ход Вася называет положительную несократимую дробь  $y$ , не превосходящую 1, и Петя в ответ сообщает Васе числитель несократимой дроби, равной сумме  $x + y$ . Как Васе за два хода гарантированно узнать  $x$ ?

4. На описанной окружности треугольника  $ABC$  отметили середины дуг  $BAC$  и  $CBA$  — точки  $M$  и  $N$  соответственно, и середины дуг  $BC$  и  $AC$  — точки  $P$  и  $Q$  соответственно. Окружность  $\omega_1$  касается стороны  $BC$  в точке  $A_1$  и продолжений сторон  $AC$  и  $AB$ . Окружность  $\omega_2$  касается стороны  $AC$  в точке  $B_1$  и продолжений сторон  $BA$  и  $BC$ . Оказалось, что  $A_1$  лежит на отрезке  $NP$ . Докажите, что  $B_1$  лежит на отрезке  $MQ$ .

5. В ряд стоят 9 вертикальных столбиков. В некоторых местах между соседними столбиками вставлены горизонтальные палочки, никакие две из которых не находятся на одной высоте. Жук ползёт снизу вверх; когда он встречает палочку, он переползает по ней на соседний столбик и продолжает ползти вверх. Известно, что если жук начинает внизу первого столбика, то он закончит свой путь на девятом столбике. Всегда ли можно убрать одну из палочек так, чтобы жук, начав внизу первого столбика, в конце пути оказался наверху пятого столбика?

Например, если палочки расположены как на рисунке, то жук будет ползти по сплошной линии. Если убрать третью палочку на пути жука, то он поползёт по пунктирной линии.

6. На каждой из 99 карточек написано действительное число. Все 99 чисел различны, а их общая сумма иррациональна. Стопка из 99 карточек называется *неудачной*, если для каждого натурального  $k$  от 1 до 99 сумма чисел на верхних  $k$  карточках иррациональна. Петя вычислил, сколькими способами можно сложить исходные карточки в неудачную стопку. Какое наименьшее значение он мог получить?