Московская математическая олимпиада

11 класс, 2024 год

Первый день

1. У математика есть 19 различных гирь, массы которых в килограммах равны $\ln 2, \ln 3, \ln 4, \ldots,$ $\ln 20$, и абсолютно точные двухчашечные весы. Он положил несколько гирь на весы так, что установилось равновесие. Какое наибольшее число гирь могло оказаться на весах?

2. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AH. Точки M и N — середины отрезков BH и CH. Докажите, что точка пересечения перпендикуляров, опущенных из точек M и N на прямые AB и AC соответственно, равноудалена от точек B и C.

3. Имеется кучка из 100 камней. Двое играют в следующую игру. Первый игрок забирает 1 камень, потом второй может забрать 1 или 2 камня, потом первый может забрать 1, 2 или 3 камня, затем второй 1, 2, 3 или 4 камня, и так далее. Выигрывает тот, кто забирает последний камень. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

4. Дан многочлен степени $n \geqslant 1$ с целыми ненулевыми коэффициентами, каждый из которых является его корнем. Докажите, что модули коэффициентов этого многочлена не превосходят 2.

5. В тетраэдре $ABCD$ скрещивающиеся рёбра попарно равны. Через середину отрезка AH_A, где H_A — точка пересечения высот грани BCD, провели прямую h_A перпендикулярно плоскости BCD. Аналогичным образом определили точки H_B, H_C, H_D и построили прямые h_B, h_C, h_D соответственно для трёх других граней тетраэдра. Докажите, что прямые h_A, h_B, h_C, h_D пересекаются в одной точке.

6. Кощей придумал для Ивана-дурака испытание. Он дал Ивану волшебную дудочку, на которой можно играть только две ноты — до и си. Для прохождения испытания Ивану нужно сыграть какую-нибудь мелодию из 300 нот на свой выбор. Но до того, как он начнёт играть, Кощей выбирает и объявляет запретными одну мелодию из пяти нот, одну — из шести нот, ..., одну — из 30 нот. Если в какой-то момент последние сыгранные ноты образуют одну из запретных мелодий, дудочка перестаёт звучать. Сможет ли Иван пройти испытание, какие бы мелодии Кощей ни объявил запретными?

Второй день

1. Существует ли на координатной плоскости точка, относительно которой симметричен график функции
$$f(x) = \frac{1}{2^x + 1}?$$

2. Чемпионат по футболу проходил в два круга. В каждом круге каждая команда сыграла с каждой один матч (за победу даётся три очка, за ничью одно, за поражение ноль). Оказалось, что все команды вместе набрали в первом круге 60% от общей суммы всех очков за два круга. Известно также, что победитель чемпионата набрал во втором круге в 30 раз меньше очков, чем все команды вместе в первом круге. Сколько команд участвовало в турнире?

3. Докажите, что если при $n \in \mathbb{N}$ число $2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$ целое, то оно — точный квадрат.

4. В остроугольном треугольнике ABC высоты AH_A, BH_B и CH_C пересекаются в точке H. Через точки, в которых окружность радиуса HH_A с центром H пересекает отрезки BH и CH, проведена прямая ℓ_A. Аналогично проведены прямые ℓ_B и ℓ_C. Докажите, что точка пересечения высот треугольника, образованного прямыми ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

5. Петя и Вася независимо друг от друга разбивают белую клетчатую доску 100×100 на произвольные группы клеток, каждая из чётного (но не обязательно все из одинакового) числа клеток, каждый — на свой набор групп. Верно ли, что после этого всегда можно покрасить по половине клеток в каждой группе из разбиения Пети в чёрный цвет так, чтобы в каждой группе из разбиения Васи было поровну чёрных и белых клеток?