Московская математическая олимпиада

10 класс, 2024 год

1. Петя и Вася играют на отрезке $[0;1]$, в котором отмечены точки 0 и 1. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждый ход игрок отмечает ранее не отмеченную точку отрезка. Если после хода очередного игрока нашлись три последовательных отрезка между соседними отмеченными точками, из которых можно сложить треугольник, то сделавший такой ход игрок объявляется победителем, и игра заканчивается. Получится ли у Пети гарантированно победить?

2. Докажите, что среди вершин выпуклого девятиугольника можно найти три, образующие тупоугольный треугольник, ни одна сторона которого не совпадает со сторонами девятиугольника.

3. В клуб любителей гиперграфов в начале года записались n попарно незнакомых школьников. За год клуб провёл 100 заседаний, причём каждое заседание посетил хотя бы один школьник. Два школьника знакомились, если было хотя бы одно заседание, которое они оба посетили. В конце года оказалось, что количество знакомых у каждого школьника не меньше, чем количество заседаний, которые он посетил. Найдите минимальное значение n, при котором такое могло случиться.

4. Дан описанный четырехугольник $ABCD$ с тупым углом ABC. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи DA и CB — в точке Q. Докажите, что $|AD - CD| \geqslant |r_1 - r_2|$, где r_1 и r_2 — радиусы вписанных окружностей треугольников PBC и QAB.

5. Будем называть натуральное число N *сильно кубическим*, если существует такой приведённый кубический многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(f(f(N))) = 0$, а $f(N)$ и $f(f(N))$ не равны 0. Верно ли, что все числа, большие 20^{24}, сильно кубические?

6. На каждой из 99 карточек написано действительное число. Все 99 чисел различны, а их общая сумма иррациональна. Стопка из 99 карточек называется неудачной, если для каждого натурального k от 1 до 99 сумма чисел на k верхних карточках иррациональна. Петя вычислил, сколькими способами можно сложить исходные карточки в неудачную стопку. Какое наименьшее значение он мог получить?