

Московская математическая олимпиада

9 класс, 2023 год

1. Саша записывает числа 1, 2, 3, 4, 5 в каком-нибудь порядке, расставляет знаки арифметических операций «+», «−», «×» и скобки и смотрит на результат полученного выражения. Например, он может получить число 8 с помощью выражения $(4 - 3) \times (2 + 5) + 1$. Может ли он получить число 123? Формировать числа из нескольких других нельзя (например, из чисел 1 и 2 нельзя составить число 12).
2. Даны две последовательности из букв А и Б, в каждой из которых по 100 букв. За одну операцию разрешается вставить в какое-то место последовательности (возможно, в начало или в конец) одну или несколько одинаковых букв или убрать из последовательности одну или несколько подряд идущих одинаковых букв. Докажите, что из первой последовательности можно получить вторую не более чем за 100 операций.
3. Периметр треугольника ABC равен 1. Окружность ω касается стороны BC , продолжения стороны AB в точке P и продолжения стороны AC в точке Q . Прямая, проходящая через середины AB и AC , пересекает описанную окружность треугольника APQ в точках X и Y . Найдите длину отрезка XY .
4. Дано натуральное число $n > 1$. Назовём положительную обыкновенную дробь (не обязательно несократимую) *хорошей*, если сумма её числителя и знаменателя равна n . Докажите, что любую положительную обыкновенную дробь, знаменатель которой меньше n , можно выразить через хорошие дроби (не обязательно различные) с помощью операций сложения и вычитания тогда и только тогда, когда n — простое число. Напомним, что обыкновенная дробь — это отношение целого числа к натуральному.
5. Правильный 100-угольник разрезали на несколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.
6. Назовем тройку чисел *триплетом*, если одно из них равно среднему арифметическому двух других. Последовательность (a_n) строится следующим образом: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и при $n > 1$ число a_n — такое минимальное натуральное число, большее a_{n-1} , что среди чисел a_0, a_1, \dots, a_n нет трёх, образующих триплет. Докажите, что $a_{2023} \leq 100\,000$.