Московская математическая олимпиада

11 класс, 2023 год

Первый день

1. К графикам функций $y = \cos x$ и $y = a\operatorname{tg} x$ провели касательные в некоторой точке их пересечения. Докажите, что эти касательные перпендикулярны друг другу для любого $a \neq 0$.

2. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, отличный от прямоугольника, а точка P выбрана внутри него так, что описанные окружности треугольников PAB и PCD имеют общую хорду, перпендикулярную AD. Докажите, что радиусы данных окружностей равны.

3. Дан многочлен $P(x)$ степени $n > 5$ с целыми коэффициентами, имеющий n различных целых корней. Докажите, что многочлен $P(x) + 3$ имеет n различных действительных корней.

4. В турнире по теннису (где не бывает ничьих) участвовало более 4 спортсменов. Каждый игровой день каждый теннисист принимал участие ровно в одной игре. К завершению турнира каждый сыграл с каждым в точности один раз. Назовём игрока *упорным*, если он выиграл хотя бы один матч и после первой своей победы ни разу не проигрывал. Остальных игроков назовём *неупорными*. Верно ли, что игровых дней, когда была встреча между неупорными игроками, больше половины?

5. Середины всех высот некоторого тетраэдра лежат на его вписанной сфере. Верно ли, что тетраэдр правильный?

6. Назовём тройку чисел *триплетом*, если одно из них равно среднему арифметическому двух других. Дана бесконечная последовательность (a_n), состоящая из натуральных чисел. Известно, что $a_1 = a_2 = 1$ и при $n > 2$ число a_n — минимальное натуральное число такое, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ нет трёх, образующих триплет. Докажите, что $a_n \leqslant \frac{n^2+7}{8}$ для любого n.

Второй день

1. Дана строго возрастающая функция $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ (где $\mathbb{N}_0$ — множество целых неотрицательных чисел), которая удовлетворяет соотношению $f(n + f(m)) = f(n) + m + 1$ для любых $m, n \in \mathbb{N}_0$. Найдите все значения, которые может принимать $f(2023)$.

2. Какое наименьшее количество различных целых чисел нужно взять, чтобы среди них можно было выбрать как геометрическую, так и арифметическую прогрессию длины 5?

3. В треугольнике ABC высоты BE и CF пересекаются в точке H, точка M — середина стороны BC, а X — точка пересечения внутренних касательных к окружностям, вписанным в треугольники BMF и CME. Докажите, что точки X, M и H лежат на одной прямой.

4. Имеются абсолютно точные двухчашечные весы и набор из 50 гирь, веса которых равны $\operatorname{arctg} 1$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$, $\ldots$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{50}$. Докажите, что можно выбрать 10 из них и разложить по 5 гирь на разные чаши весов так, чтобы установилось равновесие.

5. В выпуклом многограннике обозначим через В, Р и Т соответственно число вершин, рёбер и максимальное число треугольных граней, которые имеют общую вершину. Докажите, что $\text{В}\sqrt{\text{Р} + \text{Т}} \geqslant 2\text{Р}$.

Например, для тетраэдра ($\text{В} = 4$, $\text{Р} = 6$, $\text{Т} = 3$) выполняется равенство, а для треугольной призмы ($\text{В} = 6$, $\text{Р} = 9$, $\text{Т} = 1$) или куба ($\text{В} = 8$, $\text{Р} = 12$, $\text{Т} = 0$) имеет место строгое неравенство.