Московская математическая олимпиада

11 класс, 2021 год

Первый день

1. На доске записано натуральное число. Если у него стереть последнюю цифру (в разряде единиц), то останется ненулевое число, которое будет делиться на 20, а если первую — то на 21. Какое наименьшее число может быть записано на доске, если его вторая цифра не равна 0?

2. Существует ли функция f, определённая на отрезке $[-1; 1]$, которая при всех действительных x удовлетворяет равенству

$$2f(\cos x) = f(\sin x) + \sin x?$$

3. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Окружность ω проходит через точку A, касается прямой BC в точке M и пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Точки X и Y — середины отрезков BE и CD соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника MXY касается окружности ω.

4. В некоторой стране есть 100 городов, которые связаны такой сетью дорог, что из любого города в любой другой можно проехать только одним способом без разворотов. Схема сети дорог известна, развилки и перекрестки сети необязательно являются городами, всякая тупиковая ветвь сети обязательно заканчивается городом. Навигатор может измерить длину пути по этой сети между любыми двумя городами. Можно ли за 100 таких измерений гарантированно определить длину всей сети дорог?

5. Многогранник (выпуклый) с вершинами в серединах рёбер некоторого куба называется *кубооктаэдром.* В сечении кубооктаэдра плоскостью получился правильный многоугольник. Какое наибольшее число сторон он может иметь?

6. *Верхней целой частью* числа x называют наименьшее целое число, большее или равное x. Существует ли такое число A, что для любого натурального n расстояние от верхней целой части A^n до ближайшего квадрата натурального числа всегда равно 2?

Второй день

1. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, наибольший из которых равен сумме двух других. Докажите, что $c > ab$.

2. В остроугольном треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности. Точка B_1 симметрична точке B относительно стороны AC. Прямые AO и B_1C пересекаются в точке K. Докажите, что луч KA является биссектрисой угла BKB_1.

3. Найдите наименьшее натуральное число $N > 9$, которое не делится на 7, но если вместо любой его цифры поставить семёрку, то получится число, которое делится на 7.

4. Существует ли такой выпуклый четырёхугольник, у которого длины всех сторон и диагоналей в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию?

5. В лаборатории на полке стоят 120 внешне неразличимых пробирок, в 118 из которых находится нейтральное вещество, в одной — яд и в одной — противоядие. Пробирки случайно перемешались, и нужно найти пробирку с ядом и пробирку с противоядием. Для этого можно воспользоваться услугами внешней тестирующей лаборатории, в которую одновременно отправляют несколько смесей жидкостей из любого числа пробирок (по одной капле из пробирки), и для каждой смеси лаборатория сообщит результат: $+1$, если в смеси есть яд и нет противоядия; -1, если в смеси есть противоядие, но нет яда; 0 в остальных случаях. Можно ли, подготовив 19 таких смесей и послав их в лабораторию единой посылкой, по сообщённым результатам гарантированно определить, в какой пробирке яд, а в какой противоядие?