Московская математическая олимпиада

11 класс, 2020 год

Первый день

1. Приведите пример числа, делящегося на 2020, в котором каждая из десяти цифр встречается одинаковое количество раз.

2. Существует ли такая непериодическая функция f, определённая на всей числовой прямой, что при любом x выполнено равенство $f(x+1) = f(x+1)f(x) + 1$?

3. В остроугольном треугольнике ABC ($AB < BC$) провели высоту BH. Точка P симметрична точке H относительно прямой, соединяющей середины сторон AC и BC. Докажите, что прямая BP содержит центр описанной окружности треугольника ABC.

4. Из шахматной доски 8×8 вырезали 10 клеток. Известно, что среди вырезанных клеток есть как черные, так и белые. Какое наибольшее количество двухклеточных прямоугольников можно после этого гарантированно вырезать из этой доски?

5. Существует ли тетраэдр, в сечениях которого двумя разными плоскостями получаются квадраты 1×1 и 100×100?

6. На доске написаны $2n$ последовательных целых чисел. За ход можно разбить написанные числа на пары произвольным образом и каждую пару чисел заменить на сумму и разность чисел этой пары (не обязательно вычитать из большего числа меньшее, все замены происходят одновременно). Докажите, что на доске больше никогда не появятся $2n$ последовательных чисел.

Второй день

1. Мальчик едет на самокате от одной автобусной остановки до другой и смотрит в зеркало, не появился ли сзади автобус. Как только мальчик замечает автобус, он может изменить направление движения. При каком наибольшем расстоянии между остановками мальчик гарантированно не упустит автобус, если он знает, что едет со скоростью втрое меньшей скорости автобуса и способен увидеть автобус на расстоянии не более 2 км?

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} \pi x = [\lg \pi^x] - [\lg [\pi^x]],$$

где $[a]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее a.

3. За круглым вращающимся столом, на котором стоят 8 белых и 7 чёрных чашек, сидят 15 гномов. Они надели 8 белых и 7 чёрных колпачков. Каждый гном берёт себе чашку, цвет которой совпадает с цветом его колпачка и ставит напротив себя, после этого стол поворачивается случайным образом. Какое наибольшее число совпадений цвета чашки и колпачка можно гарантировать после поворота стола (гномы сами выбирают, как сесть, но не знают, как повернётся стол)?

4. На стороне AC треугольника ABC взяли такую точку D, что угол BDC равен углу ABC. Чему равно наименьшее возможное расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD, если $BC = 1$?

5. Кузнечик прыгает по числовой прямой, на которой отмечены точки $-a$ и b. Известно, что a и b — положительные числа, а их отношение иррационально. Если кузнечик находится в точке, которая ближе к $-a$, то он прыгает вправо на расстояние, равное a. Если же он находится в середине отрезка $[-a; b]$ или в точке, которая ближе к b, то он прыгает влево на расстояние, равное b. Докажите, что независимо от своего начального положения кузнечик в некоторый момент окажется от точки 0 на расстоянии, меньшем 10^{-6}.