

Московская математическая олимпиада

10 класс, 2019 год

1. Приведите пример девятизначного натурального числа, которое делится на 2, если зачеркнуть вторую (слева) цифру, на 3 — если зачеркнуть в исходном числе третью цифру, \dots , делится на 9, если в исходном числе зачеркнуть девятую цифру.
2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' и BB' . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Докажите, что расстояние от точки A' до прямой BO равно расстоянию от точки B' до прямой AO .
3. На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.
4. Каждая точка плоскости раскрашена в один из трёх цветов. Обязательно ли найдётся треугольник площади 1, все вершины которого имеют одинаковый цвет?
5. Петя и Вася играют в игру. Для каждого пяти различных переменных из набора x_1, \dots, x_{10} имеется единственная карточка, на которой записано их произведение. Петя и Вася по очереди берут по карточке, начинает Петя. Когда все карточки разобраны, Вася присваивает переменным значения как хочет, но так, что $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{10}$. Может ли Вася гарантированно добиться того, чтобы сумма произведений на его карточках была больше, чем у Пети?
6. Рассмотрим на клетчатой плоскости такие ломаные с началом в точке $(0, 0)$ и вершинами в точках с целыми координатами, что каждое очередное звено идёт по сторонам клеток либо вверх, либо вправо. Каждой такой ломаной соответствует *червяк* — фигура, состоящая из клеток плоскости, имеющих хотя бы одну общую точку с этой ломаной. Докажите, что червяков, которых можно разбить на двуклеточные доминошки ровно $n > 2$ различными способами, столько же, сколько натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n . (Червяки разные, если состоят из разных наборов клеток.)