Московская математическая олимпиада

9 класс, 2018 год

1. В строку выписано 81 ненулевое число. Сумма любых двух соседних чисел положительна, а сумма всех чисел отрицательна. Каким может быть знак произведения всех чисел?

2. Даны четыре палочки. Оказалось, что из любых трёх из них можно сложить треугольник, при этом площади всех четырёх треугольников равны. Обязательно ли все палочки одинаковой длины?

3. Докажите, что для любых натуральных a_1, a_2, ..., a_k таких, что

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}>1,$$

у уравнения

$$\left[\frac{n}{a_1}\right]+\left[\frac{n}{a_2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{a_k}\right]=n$$

не больше чем $a_1a_2\ldots a_k$ решений в натуральных числах. ($[x]$ — целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.)

4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ с попарно непараллельными сторонами. На стороне AD выбирается произвольная точка P, отличная от A и D. Описанные окружности треугольников ABP и CDP вторично пересекаются в точке Q. Докажите, что прямая PQ проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора точки P.

5. Назовем расстановку n единиц и m нулей по кругу *хорошей*, если в ней можно поменять местами соседние нуль и единицу так, что получится расстановка, отличающаяся от исходной поворотом. При каких натуральных n, m существует *хорошая* расстановка?

6. На олимпиаду пришло 2018 участников, некоторые из них знакомы между собой. Будем говорить, что несколько попарно знакомых участников образуют «кружок», если любой другой участник олимпиады не знаком с кем-то из них. Докажите, что можно рассадить всех участников олимпиады по 90 аудиториям так, что ни в какой аудитории не будут сидеть все представители какого-либо «кружка».