Московская математическая олимпиада

11 класс, 2018 год

Первый день

1. Графики квадратного трёхчлена и его производной разбивают координатную плоскость на четыре части. Сколько корней имеет этот квадратный трёхчлен?

2. Имеются одна треугольная и одна четырёхугольная пирамиды, все рёбра которых равны 1. Покажите, как разрезать их на несколько частей и склеить из этих частей куб (без пустот и щелей, все части должны использоваться).

3. Существуют ли такое натуральное n и такой многочлен $P(x)$ степени n, имеющий n различных действительных корней, что при всех действительных x выполнено равенство

а) $P(x)P(x+1) = P(x^2)$;

б) $P(x)P(x+1) = P(x^2+1)$?

4. Можно ли представить число 11^{2018} в виде суммы кубов двух натуральных чисел?

5. На сторонах выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1, BCD_1, CDE_1, DEF_1, EFA_1 и FAB_1. Оказалось, что треугольник $B_1D_1F_1$ — правильный. Докажите, что треугольник $A_1C_1E_1$ также правильный.

6. В доме из 2^n комнат сделали евроремонт. При этом выключатели света оказались перепутанными, так что при включении выключателя в одной комнате загорается лампочка, вообще говоря, в какой-то другой комнате. Чтобы узнать, какой выключатель к какой комнате подсоединён, прораб посылает несколько людей в какие-то комнаты, чтобы те, одновременно включив там выключатели, вернулись и сообщили ему, горела лампочка в их комнате или нет.

а) Докажите, что за $2n$ таких посылок прораб может установить соответствие между выключателями и комнатами.

б) А может ли он обойтись $2n-1$ такими посылками?

Второй день

1. Решите уравнение

$$x^3 + (\log_2 5 + \log_3 2 + \log_5 3)\, x = (\log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 2)\, x^2 + 1.$$

2. На доску 2018×2018 клеток положили без наложений некоторое количество доминошек, каждая из которых закрывает ровно две клетки. Оказалось, что ни у каких двух доминошек нет общей целой стороны, т. е. никакие две не образуют ни квадрат 2×2, ни прямоугольник 4×1. Может ли при этом быть покрыто более 99% всех клеток доски?

3. Пусть x и y — пятизначные числа, в десятичной записи которых использованы все десять цифр ровно по одному разу. Найдите наибольшее возможное значение x, если

$$\operatorname{tg} x^\circ - \operatorname{tg} y^\circ = 1 + \operatorname{tg} x^\circ \operatorname{tg} y^\circ$$

(x° обозначает угол в x градусов).

12786

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Окружность, описанная вокруг треугольника A_1BC_1, проходит через точку M пересечения медиан. Найдите все возможные значения величины угла B.

5. Женя красила шарообразное яйцо последовательно в пяти красках, погружая его в стакан с очередной краской так, чтобы окрашивалась ровно половина площади поверхности яйца (полсферы). В результате яйцо окрасилось полностью. Докажите, что одна из красок была лишней, то есть если бы Женя не использовала эту краску, а в другие краски погружала бы яйцо так же, то оно всё равно окрасилось бы полностью.