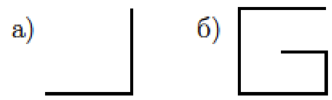
Московская математическая олимпиада

9 класс, 2017 год

1. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры в десятичной записи которого различны и которое уменьшается в 5 раз, если зачеркнуть первую цифру.

2. В шахматном турнире каждый участник встретился с каждым один раз. В каждом туре каждый участник проводил по одной встрече. Не меньше чем в половине всех встреч оба участника были земляками (из одного города). Докажите, что в каждом туре была хотя бы одна встреча между земляками.

3. Существует ли клетчатый многоугольник, который можно поделить на две равные части разрезом такой формы? Разрез должен лежать внутри многоугольника (на границу могут выходить только концы разреза).



4. Найдите все такие пары натуральных чисел a и k, что для всякого натурального n, взаимно простого с a, число $a^{k^n+1} - 1$ делится на n.

5. Петя раскрасил каждую клетку квадрата 1000×1000 в один из 10 цветов. Также он придумал такой 10-клеточный многоугольник Φ, что при любом способе вырезать из этого квадрата по границам клеток многоугольник, равный Φ, в нём все 10 клеток оказываются разного цвета. Обязательно ли Φ — прямоугольник?

6. В треугольнике ABC с углом A, равным 45°, проведена медиана AM. Прямая b симметрична прямой AM относительно высоты BB_1, а прямая c симметрична прямой AM относительно высоты CC_1. Прямые b и c пересеклись в точке X. Докажите, что $AX = BC$.