

Московская математическая олимпиада**11 класс, 2017 год****Первый день**

1. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 80, в котором можно так переставить две его различные цифры, что получившееся число также будет кратно 80.
2. На вписанной окружности треугольника ABC , касающейся стороны AC в точке S , нашлась такая точка Q , что середины отрезков AQ и QC также лежат на вписанной окружности. Докажите, что QS — биссектриса угла AQC .
3. Пусть x_0 — положительный корень уравнения $x^{2017} - x - 1 = 0$, а y_0 — положительный корень уравнения $y^{4034} - y = 3x_0$.
 - а) Сравните x_0 и y_0 .
 - б) Найдите десятый знак после запятой числа $|x_0 - y_0|$.
4. Три велосипедиста ездят в одном направлении по круглому треку длиной 300 метров. Каждый из них движется со своей постоянной скоростью, все скорости различны. Фотограф сможет сделать удачный снимок велосипедистов, если все они окажутся на каком-либо участке трека длиной d метров. При каком наименьшем d фотограф рано или поздно заведомо сможет сделать удачный снимок?
5. На гранях единичного куба отметили 8 точек, которые служат вершинами меньшего куба. Найдите все значения, которые может принимать длина ребра этого куба.
6. В Чикаго орудует 36 преступных банд, некоторые из которых враждуют между собой. Каждый гангстер состоит в нескольких бандах, причём любые два гангстера состоят в разных наборах банд. Известно, что ни один гангстер не состоит в двух бандах, враждующих между собой. Кроме того, оказалось, что каждая банда, в которой не состоит некоторый гангстер, враждует с какой-то бандой, в которой данный гангстер состоит. Какое наибольшее количество гангстеров может быть в Чикаго?

Второй день

1. Даны две непостоянные прогрессии (a_n) и (b_n) , одна из которых арифметическая, а другая — геометрическая. Известно, что $a_1 = b_1$, $a_2 : b_2 = 2$ и $a_4 : b_4 = 8$. Чему может быть равно отношение $a_3 : b_3$?
2. Незнайка знаком только с десятичными логарифмами и считает, что логарифм суммы двух чисел равен произведению их логарифмов, а логарифм разности двух чисел равен частному их логарифмов. Может ли Незнайка подобрать хотя бы одну пару чисел, для которой действительно верны одновременно оба этих равенства?
3. Детектив Ниро Вульф расследует преступление. В деле замешаны 80 человек, среди которых один — преступник, ещё один — свидетель преступления (но неизвестно, кто это). Каждый день детектив может пригласить к себе одного или нескольких из этих 80 человек, и если среди приглашённых есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. Может ли детектив заведомо раскрыть дело за 12 дней?
4. Внутри треугольника ABC взята такая точка D , что $BD = CD$, $\angle BDC = 120^\circ$. Вне треугольника ABC взята такая точка E , что $AE = CE$, $\angle AEC = 60^\circ$ и точки B и E находятся в разных полуплоскостях относительно AC . Докажите, что $\angle AFD = 90^\circ$, где F — середина отрезка BE .
5. Таблица размером 2017×2017 заполнена ненулевыми цифрами. Среди 4034 чисел, десятичные записи которых совпадают со строками и столбцами этой таблицы, читаемыми слева направо и сверху вниз соответственно, все, кроме одного, делятся на простое число p , а оставшееся число на p не делится. Найдите все возможные значения p .