Московская математическая олимпиада

11 класс, 2016 год

Первый день

1. На шахматном турнире для 12 участников каждый сыграл ровно по одной партии с каждым из остальных. За выигрыш давали 1 очко, за ничью — $1/2$, за проигрыш — 0. Вася проиграл только одну партию, но занял последнее место, набрав меньше всех очков. Петя занял первое место, набрав больше всех очков. На сколько очков Вася отстал от Пети?

2. Существует ли такое значение x, что выполняется равенство $\arcsin^2 x + \arccos^2 x = 1$?

3. Внутри трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC отмечены точки M и N так, что $AM = CN$ и $BM = DN$, а четырёхугольники $AMND$ и $BMNC$ — вписанные. Докажите, что прямая MN параллельна основаниям трапеции.

4. В английском клубе вечером собрались n его членов ($n \geqslant 3$). По традициям клуба каждый принёс с собой сок того вида, который он предпочитает, в том количестве, которое он планирует выпить в течение вечера. Согласно правилам клуба, в любой момент любые три его члена могут присесть за столик и выпить сока (каждый — своего) в любом количестве, но обязательно все трое поровну. Докажите, что для того, чтобы все члены могли в течение вечера полностью выпить принесённый с собой сок, необходимо и достаточно, чтобы доля сока, принесённого каждым членом клуба, не превосходила одной трети от общего количества.

5. Можно ли четырьмя плоскостями разрезать куб с ребром 1 на части так, чтобы для каждой из частей расстояние между любыми двумя её точками было:

а) меньше $4/5$;

б) меньше $4/7$?

Предполагается, что все плоскости проводятся одновременно, куб и его части не двигаются.

6. С левого берега реки на правый с помощью одной лодки переправились N туземцев, каждый раз плавая направо вдвоем, а обратно — в одиночку. Изначально каждый знал по одному анекдоту, каждый — свой. На берегах они анекдотов не рассказывали, но в лодке каждый рассказывал попутчику все известные ему на данный момент анекдоты. Для каждого натурального k найдите наименьшее возможное значение N, при котором могло случиться так, что в конце каждый туземец знал, кроме своего, ещё не менее чем k анекдотов.

Второй день

1. Найдите наименьшее натуральное число, десятичная запись квадрата которого оканчивается на 2016.

2. Имеются чашечные весы, которые находятся в равновесии, если разность масс на их чашах не превосходит 1 г, а также гири массами $\ln 3$, $\ln 4$, $\ldots$, $\ln 79$ г. Можно ли разложить все эти гири на чаши весов так, чтобы весы находились в равновесии?

3. Можно ли отметить k вершин правильного 14-угольника так, что каждый четырёхугольник с вершинами в отмеченных точках, имеющий две параллельные стороны, является прямоугольником, если: а) $k = 6$; б) $k \geqslant 7$?

4. За некоторое время мальчик проехал на велосипеде целое число раз по периметру квадратной школы в одном направлении с постоянной по величине скоростью 10 км/ч. В это же время по периметру школы прогуливался его папа со скоростью 5 км/ч, при этом он мог менять направление движения. Папа видел мальчика в те и только те моменты, когда они находились на одной стороне школы. Мог ли папа видеть мальчика больше половины указанного времени?

5. Про приведённый многочлен $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ с действительными коэффициентами известно, что при некотором натуральном $m \geqslant 2$ многочлен $\underbrace{P(P(\ldots P}_{m \text{ раз}}(x)\ldots))$ имеет действительные корни, причём только положительные. Обязательно ли сам многочлен $P(x)$ имеет действительные корни, причём только положительные?