Московская математическая олимпиада

9 класс, 2014 год

1. Все коэффициенты квадратного трёхчлена — нечётные целые числа. Докажите, что у него нет корней вида $1/n$, где n — натуральное число.

2. В магазине в ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашка. Найдите такое минимальное k, что при любом изначальном порядке рубашек можно снять k белых и k фиолетовых рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся фиолетовые рубашки тоже висели подряд.

$\boxed{10}$

3. Дано n палочек. Из любых трёх можно сложить тупоугольный треугольник. Каково наибольшее возможное значение n?

$\boxed{4}$

4. На квадратном столе лежит квадратная скатерть так, что ни один угол стола не закрыт, но с каждой стороны стола свисает треугольный кусок скатерти. Известно, что какие-то два соседних куска равны. Докажите, что и два других куска тоже равны. (Скатерть нигде не накладывается сама на себя, её размеры могут отличаться от размеров стола.)

5. *Радикалом* натурального числа N (обозначается $\mathrm{rad}(N)$) называется произведение всех простых делителей числа N, взятых по одному разу. Например, $\mathrm{rad}(120) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Существует ли такая тройка попарно взаимно простых натуральных чисел A, B, C, что $A + B = C$ и $C > 1000 \cdot \mathrm{rad}(ABC)$?

$\boxed{\text{Да}}$

6. На окружности отмечены 10 точек, занумерованные по часовой стрелке: A_1, A_2, …, A_{10}, причём известно, что их можно разбить на пары симметричных относительно центра окружности. Изначально в каждой отмеченной точке сидит по кузнечику. Каждую минуту один из кузнечиков прыгает вдоль окружности через своего соседа так, чтобы расстояние между ними не изменилось. При этом нельзя пролетать над другими кузнечиками и попадать в точку, где уже сидит кузнечик. Через некоторое время оказалось, что какие-то 9 кузнечиков сидят в точках A_1, A_2, …, A_9, а десятый кузнечик сидит на дуге $A_9A_{10}A_1$. Можно ли утверждать, что он сидит именно в точке A_{10}?

$\boxed{\text{Да}}$