Московская математическая олимпиада

11 класс, 2014 год

Первый день

1. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает в точках $1/a$ и c значения разных знаков. Докажите, что корни трёхчлена $f(x)$ имеют разные знаки.

2. Найдите все значения a, для которых найдутся такие x, y и z, что числа $\cos x$, $\cos y$ и $\cos z$ попарно различны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию, при этом числа $\cos(x + a)$, $\cos(y + a)$ и $\cos(z + a)$ также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию.

3. На сторонах AD и CD параллелограмма $ABCD$ с центром O отмечены такие точки P и Q соответственно, что $\angle AOP = \angle COQ = \angle ABC$.

а) Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

б) Докажите, что прямые AQ и CP пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

4. Саша обнаружил, что на калькуляторе осталось ровно n исправных кнопок с цифрами. Оказалось, что любое натуральное число от 1 до 99999999 можно либо набрать, используя лишь исправные кнопки, либо получить как сумму двух натуральных чисел, каждое из которых можно набрать, используя лишь исправные кнопки. Каково наименьшее n, при котором это возможно?

5. Многочлен $P(x)$ удовлетворяет условиям: $P(0) = 1$, $(P(x))^2 = 1 + x + x^{100}Q(x)$, где $Q(x)$ — некий многочлен. Докажите, что коэффициент при x^{99} в многочлене $(P(x) + 1)^{100}$ равен нулю.

6. В королевстве некоторые пары городов соединены железной дорогой. У короля есть полный список, в котором поименно перечислены все такие пары (каждый город имеет свое собственное имя). Оказалось, что для любой упорядоченной пары городов принц может переименовать все города так, чтобы первый город оказался названным именем второго города, а король не заметил бы изменений. Верно ли, что для любой пары городов принц может переименовать все города так, чтобы первый город оказался названным именем второго города, второй город оказался названным именем первого города, а король не заметил бы изменений?

Второй день

1. Существует ли такой квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2+bx+c$ с целыми коэффициентами и a, не кратным 2014, что все числа $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(2014)$ имеют различные остатки при делении на 2014?

2. Найдите все такие a и b, что $|a| + |b| \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$ и при всех x выполнено неравенство

$$|a \sin x + b \sin 2x| \leqslant 1.$$

3. Докажите, что для любого натурального n найдется натуральное число, десятичная запись квадрата которого начинается n единицами, а заканчивается какой-то комбинацией из n единиц и двоек.

4. У повара в подчинении десять поварят, некоторые из которых дружат между собой. Каждый рабочий день повар назначает одного или нескольких поварят на дежурство, а каждый из дежурных поварят уносит с работы по одному пирожному каждому своему недежурящему другу. В конце дня повар узнает количество пропавших пирожных. Сможет ли он за 45 рабочих дней понять, кто из поварят дружит между собой, а кто нет?

5. Поверхность выпуклого многогранника $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ состоит из восьми треугольных граней $A_iB_jC_k$, где i, j, k меняются от 1 до 2. Сфера с центром в точке O касается всех этих граней. Докажите, что точка O и середины трёх отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 лежат в одной плоскости.