Московская математическая олимпиада

10 класс, 2014 год

1. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает в точках $1/a$ и c значения разных знаков. Докажите, что корни трёхчлена $f(x)$ имеют разные знаки.

2. В магазине в ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашка. Найдите такое минимальное k, что при любом изначальном порядке рубашек можно снять k белых и k фиолетовых рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся фиолетовые рубашки тоже висели подряд.

$\boxed{10}$

3. Дан треугольник ABC. Обозначим через M середину стороны AC, а через P — середину отрезка CM. Описанная окружность треугольника ABP пересекает сторону BC во внутренней точке Q. Докажите, что $\angle ABM = \angle MQP$.

4. Дано несколько белых и несколько чёрных точек. Из каждой белой точки идет стрелка в каждую чёрную, на каждой стрелке написано натуральное число. Известно, что если пройти по любому замкнутому маршруту, то произведение чисел на стрелках, идущих по направлению движения, равно произведению чисел на стрелках, идущих против направления движения. Обязательно ли тогда можно поставить в каждой точке натуральное число так, чтобы число на каждой стрелке равнялось произведению чисел на ее концах?

$\boxed{\text{Да}}$

5. Дан треугольник, у которого нет равных углов. Петя и Вася играют в такую игру: за один ход Петя отмечает точку на плоскости, а Вася красит ее по своему выбору в красный или синий цвет. Петя выиграет, если какие-то три из отмеченных им и покрашенных Васей точек образуют одноцветный треугольник, подобный исходному. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть (каков бы ни был исходный треугольник)?

$\boxed{5}$

6. Многочлен $P(x)$ удовлетворяет условиям: $P(0) = 1$, $(P(x))^2 = 1 + x + x^{100}Q(x)$, где $Q(x)$ — некий многочлен. Докажите, что коэффициент при x^{99} в многочлене $(P(x) + 1)^{100}$ равен нулю.