Московская математическая олимпиада

8 класс, 2013 год

1. Ваня записал несколько простых чисел, использовав ровно по одному разу все цифры от 1 до 9. Сумма этих простых чисел оказалась равной 225. Можно ли, использовав ровно по одному разу те же цифры, записать несколько простых чисел так, чтобы их сумма оказалась меньше?

2. Треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$). Точка M — середина стороны AB, точка P — середина отрезка CM, точка N делит сторону BC в отношении $3 : 1$ (считая от вершины B). Докажите, что $AP = MN$.

3. На занятии кружка 10 школьников решали 10 задач. Все школьники решили разное количество задач; каждую задачу решило одинаковое количество школьников. Один из этих десяти школьников, Боря, решил задачи с первой по пятую и не решил задачи с шестой по девятую. Решил ли он десятую задачу?

4. По кругу расставили 1000 чисел, среди которых нет нулей, и раскрасили их поочередно в белый и чёрный цвета. Оказалось, что каждое чёрное число равно сумме двух соседних с ним белых чисел, а каждое белое число равно произведению двух соседних с ним чёрных чисел. Чему может быть равна сумма всех расставленных чисел?

5. Будем называть точку плоскости *узлом*, если обе её координаты — целые числа. Внутри некоторого треугольника с вершинами в узлах лежит ровно два узла (возможно, какие-то ещё узлы лежат на его сторонах). Докажите, что прямая, проходящая через эти два узла, либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.

6. На доске записано целое положительное число N. Два игрока ходят по очереди. За ход разрешается либо заменить число на доске на один из его делителей (отличных от единицы и самого числа), либо уменьшить число на единицу (если при этом число остается положительным). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. При каких N первый игрок может выиграть, как бы ни играл соперник?