Московская математическая олимпиада

11 класс, 2013 год

Первый день

1. Два приведённых квадратных трёхчлена имеют общий корень, а дискриминант их суммы равен сумме их дискриминантов. Докажите, что тогда дискриминант хотя бы одного из этих двух трёхчленов равен нулю.

2. Найдите все пары простых чисел p и q, обладающие следующим свойством: $7p+1$ делится на q, а $7q+1$ делится на p.

3. Дан такой выпуклый четырёхугольник $ABCD$, что $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K, L и M — середины отрезков AB, CD и AC соответственно. Перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой BC, пересекается с перпендикуляром, проведённым из точки C к прямой AD, в точке H. Докажите, что прямые KL и HM перпендикулярны.

4. Можно ли так раскрасить все клетки бесконечной клетчатой плоскости в белый и чёрный цвета, чтобы каждая вертикальная прямая и каждая горизонтальная прямая пересекали конечное число белых клеток, а каждая наклонная прямая — конечное число чёрных?

5. Три спортсмена стартовали одновременно из точки A и бежали по прямой в точку B каждый со своей постоянной скоростью. Добежав до точки B, каждый из них мгновенно повернул обратно и бежал с другой постоянной скоростью к финишу в точке A. Их тренер бежал рядом и все время находился в точке, сумма расстояний от которой до участников забега была наименьшей. Известно, что расстояние от A до B равно 60 м и все спортсмены финишировали одновременно. Мог ли тренер пробежать меньше 100 м?

6. Две команды шахматистов одинаковой численности сыграли матч: каждый сыграл по одному разу с каждым из другой команды. В каждой партии давали 1 очко за победу, $\frac{1}{2}$ — за ничью и 0 — за поражение. В итоге команды набрали поровну очков. Докажите, что какие-то два участника матча тоже набрали поровну очков, если в обеих командах было:

а) по 5 шахматистов;

б) произвольное равное число шахматистов.

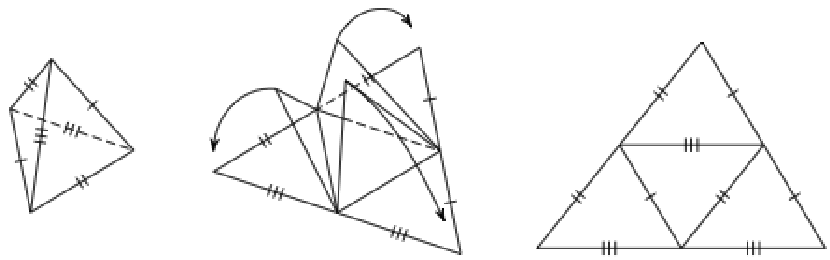
Второй день

1. Два пирата делили добычу, состоящую из пяти золотых слитков, масса одного из которых 1 кг, а другого — 2 кг. Какую массу могли иметь три других слитка, если известно, что какие бы два слитка ни выбрал себе первый пират, второй пират сможет так разделить оставшиеся слитки, чтобы каждому из них досталось золота поровну?

2. Найдите такое значение $a > 1$, при котором уравнение $a^x = \log_a x$ имеет единственное решение.

3. Сравните числа
$$\left(1+\frac{2}{3^3}\right)\left(1+\frac{2}{5^3}\right)\ldots\left(1+\frac{2}{2013^3}\right) \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

4. Известно, что всякую треугольную пирамиду, противоположные рёбра которой попарно равны, можно так разрезать вдоль трёх её ребер и развернуть, чтобы ее развёрткой стал треугольник без внутренних разрезов (см. рисунок).



Найдётся ли ещё какой-нибудь выпуклый многогранник, который можно так разрезать вдоль нескольких его рёбер и развернуть, чтобы его развёрткой стал треугольник без внутренних разрезов?

5. Саша написал по кругу в произвольном порядке не более ста различных натуральных чисел, а Дима пытается угадать их количество. Для этого Дима сообщает Саше в некотором порядке несколько номеров, а затем Саша сообщает Диме в том же порядке, какие числа стоят под указанными Димой номерами, если считать числа по часовой стрелке, начиная с одного и того же числа. Сможет ли Дима заведомо угадать количество написанных Сашей чисел, сообщив

а) 17 номеров;

б) менее 16 номеров?