Московская математическая олимпиада

9 класс, 2012 год

1. В стране Далёкой провинция называется крупной, если в ней живёт более 7% жителей этой страны. Известно, что для каждой крупной провинции найдутся такие две провинции с меньшим населением , что их суммарное население больше, чем у этой крупной провинции. Какое наименьшее число провинций может быть в стране Далёкой?

2. В ряд лежит чётное число груш. Массы любых двух соседних груш отличаются не более чем на 1 г. Докажите, что можно все груши разложить по две в одинаковые пакеты и выложить пакеты в ряд так, чтобы массы любых двух соседних пакетов тоже отличались не более чем на 1 г.

3. В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD. На отрезке BH отметили точку M, равноудалённую от точек C и D. Пусть K — середина стороны AB. Докажите, что угол MKD прямой.

4. Рациональные числа x, y и z таковы, что все числа $x + y^2 + z^2$, $x^2 + y + z^2$ и $x^2 + y^2 + z$ целые. Верно ли, что число $2x$ целое?

5. Дан треугольник ABC. Прямая l касается вписанной в него окружности. Обозначим через l_a, l_b, l_c прямые, симметричные l относительно биссектрис внешних углов треугольника. Докажите, что треугольник, образованный этими прямыми, равен треугольнику ABC.

6. а) В футбольном турнире участвовало 75 команд. Каждая команда играла с каждой один раз, за победу в матче команда получала 3 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. Известно, что любые две команды набрали различное количество очков. Найдите наименьшую возможную разность очков у команд, занявших первое и последнее места.

б) Тот же вопрос для n команд.