Московская математическая олимпиада

11 класс, 2012 год

Первый день

1. Алёша написал на доске 5 целых чисел — коэффициенты и корни квадратного трёхчлена. Боря стёр одно из них. Остались числа 2, 3, 4, -5 в каком-то порядке. Восстановите стёртое число и докажите, что было написано именно оно.

2. Для заданных значений a, b, c и d оказалось, что графики функций

$$y = 2a + \frac{1}{x-b} \quad \text{и} \quad y = 2c + \frac{1}{x-d}$$

имеют ровно одну общую точку. Докажите, что графики функций

$$y = 2b + \frac{1}{x-a} \quad \text{и} \quad y = 2d + \frac{1}{x-c}$$

также имеют ровно одну общую точку.

3. В треугольнике ABC высоты или их продолжения пересекаются в точке H, а R — радиус описанной около него окружности. Докажите, что если $\angle A \leqslant \angle B \leqslant \angle C$, то $AH + BH \geqslant 2R$.

4. На собрание пришло n человек ($n > 1$). Оказалось, что у любых двух из них есть среди собравшихся ровно два других общих знакомых.

а) Докажите, что каждый из них знаком с одинаковым числом людей на этом собрании.

б) Покажите, что n может быть больше 4.

5. Для $n = 1, 2, 3$ будем называть числом n-го типа любое число, которое либо равно 0, либо входит в бесконечную геометрическую прогрессию $1, (n+2), (n+2)^2, \ldots$, либо является суммой нескольких различных её членов. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы числа первого типа, числа второго типа и числа третьего типа.

6. Про бесконечный набор прямоугольников известно, что в нём для любого числа S найдутся прямоугольники суммарной площади больше S.

а) Обязательно ли этим набором можно покрыть всю плоскость, если при этом допускаются наложения?

б) Тот же вопрос, если дополнительно известно, что все прямоугольники в наборе являются квадратами.

Второй день

1. К каждому члену некоторой конечной последовательности подряд идущих натуральных чисел приписали справа по две цифры и получили последовательность квадратов подряд идущих натуральных чисел. Какое наибольшее число членов могла иметь эта последовательность?

2. На плоской горизонтальной площадке стоят 5 прожекторов, каждый из которых испускает лазерный луч под одним из двух острых углов α или β к площадке и может вращаться лишь вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину луча. Известно, что любые 4 из этих прожекторов можно повернуть так, что все 4 испускаемых ими луча пересекутся в одной точке. Обязательно ли можно так повернуть все 5 прожекторов, чтобы все 5 лучей пересеклись в одной точке?

3. Учитель написал на доске в алфавитном порядке все возможные 2^n слов, состоящих из n букв А или Б. Затем он заменил каждое слово на произведение n множителей, исправив каждую букву А на x, а каждую букву Б — на $(1-x)$, и сложил между собой несколько первых из этих многочленов от x. Докажите, что полученный многочлен представляет собой либо постоянную, либо возрастающую на отрезке $[0;1]$ функцию от x.

4. После обеда на *прозрачной* квадратной скатерти остались тёмные пятна общей площади S. Оказалось, что если сложить скатерть пополам вдоль любой из двух линий, соединяющих середины противоположных её сторон, или же вдоль одной из двух её диагоналей, то общая видимая площадь пятен будет равна S_1. Если же сложить скатерть пополам вдоль другой её диагонали, то общая видимая площадь пятен останется равна S. Какое наименьшее значение может принимать величина $S_1 : S$?

5. Обозначим через $S(n,k)$ количество не делящихся на k коэффициентов разложения многочлена $(x+1)^n$ по степеням x.

а) Найдите $S(2012,3)$.

б) Докажите, что $S(2012^{2011}, 2011)$ делится на 2012.