Московская математическая олимпиада

9 класс, 2011 год

1. Что больше: $2011^{2011} + 2009^{2009}$ или $2011^{2009} + 2009^{2011}$?

2. В турнире каждый участник встретился с каждым из остальных один раз. Каждую встречу судил один арбитр, и все арбитры судили разное количество встреч. Игрок Иванов утверждает, что все его встречи судили разные арбитры. То же самое утверждают о себе игроки Петров и Сидоров. Может ли быть, что никто из них не ошибается?

3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C угол A равен $30°$. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, D — точка пересечения отрезка BI с этой окружностью. Докажите, что отрезки AI и CD перпендикулярны.

4. На доске написаны три натуральных числа, не превосходящих 40. За один ход можно увеличить любое из написанных чисел на число процентов, равное одному из двух оставшихся чисел, если в результате получится целое число. Существуют ли такие исходные числа, что за несколько ходов одно из чисел на доске можно сделать больше 2011?

5. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC лучи AB и DC пересекаются в точке K. Точки P и Q — центры описанных окружностей треугольников ABD и BCD. Докажите, что $\angle PKA = \angle QKD$.

6. На доске выписано $(n-1)n$ выражений: $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3$, $\ldots$, $x_1 - x_n$, $x_2 - x_1$, $x_2 - x_3$, $\ldots$, $x_2 - x_n$, $\ldots$, $x_n - x_{n-1}$, где $n \geqslant 3$. Лёша записал в тетрадь все эти выражения, их суммы по два различных, по три различных и т. д. вплоть до суммы всех выражений. При этом Лёша во всех выписываемых суммах приводил подобные слагаемые (например, вместо $(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3)$ Лёша запишет $x_1 - x_3$, а вместо $(x_1 - x_2) + (x_2 - x_1)$ он запишет 0). Сколько выражений Лёша записал в тетрадь ровно по одному разу?