Московская математическая олимпиада

11 класс, 2011 год

Первый день

1. Последовательность из двух различных чисел продолжили двумя способами: так, чтобы получилась геометрическая прогрессия, и так, чтобы получилась арифметическая прогрессия. При этом третий член геометрической прогрессии совпал с десятым членом арифметической прогрессии. А с каким членом арифметической прогрессии совпал четвёртый член геометрической прогрессии?

2. Сравните между собой наименьшие положительные корни многочленов $x^{2011} + 2011x - 1$ и $x^{2011} - 2011x + 1$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC взята точка D, а на боковой стороне AB — точки E и M так, что $AM = ME$ и отрезок DM параллелен стороне AC. Докажите, что $AD + DE > AB + BE$.

4. В каждой клетке квадратной таблицы написано по действительному числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма k наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма k наибольших чисел равна b.

1) Докажите, что если $k = 2$, то $a = b$.
2) В случае $k = 3$ приведите пример такой таблицы, для которой $a \neq b$.

5. Рассматриваются ортогональные проекции данного правильного тетраэдра с единичным ребром на всевозможные плоскости. Какое наибольшее значение может принимать радиус круга, содержащегося в такой проекции?

6. Продавец хочет разрезать кусок сыра на части, которые можно будет разложить на две кучки равного веса. Он умеет разрезать любой кусок сыра в одном и том же отношении $a : (1 - a)$ по весу, где $0 < a < 1$. Верно ли, что на любом промежутке длины 0,001 из интервала $(0; 1)$ найдётся значение a, при котором он сможет добиться желаемого результата с помощью конечного числа разрезов?

Второй день

1. Кривая на плоскости в некоторой системе координат (декартовой) служит графиком функции $y = \sin x$. Может ли та же кривая являться графиком функции $y = \sin^2 x$ в другой системе координат: если да, то каковы её начало координат и единицы длины на осях (относительно исходных координат и единиц длины)?

2. Верно ли, что любые 100 карточек, на которых написано по одной цифре 1, 2 или 3, встречающейся не более чем по 50 раз каждая, можно разложить в один ряд так, чтобы в нём не было фрагментов 11, 22, 33, 123 и 321?

3. Внутри треугольника ABC взята такая точка O, что $\angle ABO = \angle CAO$, $\angle BAO = \angle BCO$, $\angle BOC = 90^\circ$. Найдите отношение $AC : OC$.

4. При какой перестановке $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ чисел $1, 2, \ldots, 2011$ значение выражения

$$a_1^{a_2^{a_3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_{2010}^{a_{2011}}}}}}}}$$

будет наибольшим?

5. По рёбрам треугольной пирамиды ползают четыре жука, при этом каждый жук всё время остаётся только в одной грани (в каждой грани — свой жук). Каждый жук обходит границу своей грани в определённом направлении, причём так, что любые два жука по общему для них ребру ползут в противоположных направлениях. Докажите, что если скорости (возможно, непостоянные) каждого из жуков всегда больше 1 см/с, то когда-нибудь какие-то два жука обязательно встретятся независимо от пирамиды, начального положения и скорости жуков.