

Московская математическая олимпиада

9 класс, 2010 год

1. Съев на пустой желудок трёх поросят и семерых козлят, Серый Волк всё ещё страдал от голода. Зато в другой раз он съел на пустой желудок 7 поросят и козлёнка и страдал уже от ожорства. От чего пострадает Волк, если съест на пустой желудок 11 козлят?
2. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ выбрана точка M . Через эту точку проведён перпендикуляр к прямой CM , который пересекает сторону AD в точке E . Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую CE . Найдите угол APB .
3. У каждого жителя города Тьмутаракань есть свои тараканы, не у всех поровну. Два таракана являются товарищами, если у них общий хозяин (в частности, каждый таракан сам себе товарищ). Что больше: среднее количество тараканов, которыми владеет житель города, или среднее количество товарищей у таракана?
4. На окружности расставлены 2009 чисел, каждое из которых равно $+1$ или -1 , причём не все числа одинаковые. Рассмотрим всевозможные десятки подряд стоящих чисел. Найдём произведения чисел в каждом десятке и сложим их. Какая наибольшая сумма может получиться?
5. Дана незамкнутая несамопересекающаяся ломаная из 37 звеньев. Через каждое звено провели прямую. Какое наименьшее число различных прямых могло получиться?
6. Толя хочет получить из данного натурального числа однозначное. Для этого разрешается расставить между цифрами плюсы произвольным образом и вычислить сумму (например, из числа 123456789 можно получить $12345 + 6 + 789 = 13140$). С полученным числом снова разрешается сделать подобную операцию, и так далее. Докажите, что за 10 операций всегда можно получить однозначное число.