

Московская математическая олимпиада

9 класс, 2009 год

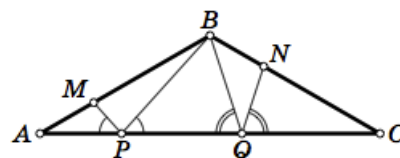
1. После урока на доске остался график функции $y = \frac{k}{x}$ и пять прямых, параллельных прямой $y = kx$ ($k \neq 0$). Найдите произведение абсцисс всех десяти точек пересечения.

2. Докажите, что существует многоугольник, который можно разделить отрезком на две равные части так, что этот отрезок разделит одну из сторон многоугольника пополам, а другую — в отношении 2 : 1.

3. В каждой клетке квадрата 101×101 стоит один из двух знаков: «поворот» или «прямо». Машинка может въехать извне в любую клетку на границе квадрата (под прямым углом к границе). Если машинка попадает в клетку со знаком «прямо», то она продолжает ехать в том же направлении, что и ехала. Если попадает в клетку со знаком «поворот», то поворачивает на 90° в любую сторону по своему выбору. В центральной клетке квадрата спрятаны сокровища. Можно ли расставить знаки так, чтобы у машинки не было возможности попасть в центральную клетку?

4. Назовём последовательность натуральных чисел *интересной*, если каждый её член, кроме первого, является либо средним арифметическим, либо средним геометрическим двух соседних с ним членов. Сеня начал последовательность с трёх натуральных чисел, образующих возрастающую геометрическую прогрессию. Он хотел бы продолжить свою последовательность до бесконечной интересной последовательности, которая ни с какого момента не становится ни арифметической, ни геометрической прогрессией. Может ли оказаться, что этого нельзя сделать?

5. Угол B при вершине равнобедренного треугольника ABC равен 120° . Из вершины B выпустили внутрь треугольника два луча под углом 60° друг к другу, которые, отразившись от основания AC в точках P и Q , попали на боковые стороны в точки M и N (см. рисунок). Докажите, что площадь треугольника PBQ равна сумме площадей треугольников AMP и CNQ .



6. Дано целое число $n > 1$. Двое игроков по очереди отмечают точки на окружности: первый — красным цветом, второй — синим (отмечать одну и ту же точку дважды нельзя). Когда отмечено по n точек каждого цвета, игра заканчивается. После этого каждый игрок находит на окружности дугу наибольшей длины с концами своего цвета, на которой больше нет отмеченных точек. Игрок, у которого найденная длина больше, выиграл (в случае равенства длин дуг, а также при отсутствии таких дуг у обоих игроков — ничья). Может ли один из игроков обеспечить себе победу?