

Московская математическая олимпиада**11 класс, 2009 год**

1. Когда из бассейна сливают воду, уровень h воды в нём меняется в зависимости от времени t по закону $h(t) = at^2 + bt + c$, а в момент t_0 окончания слива выполнены равенства $h(t_0) = h'(t_0) = 0$. За сколько часов вода из бассейна сливается полностью, если за первый час уровень воды в нём уменьшается вдвое?
2. Моток ниток проткнули насквозь 72 цилиндрическими спицами радиуса 1 каждая, в результате чего он приобрёл форму цилиндра радиуса 6. Могла ли высота этого цилиндра оказаться также равной 6?
3. На плоскости даны оси координат с одинаковым, но не обозначенным масштабом и график функции $y = \sin x$, $x \in (0; \alpha)$. Как с помощью циркуля и линейки построить касательную к этому графику в заданной его точке, если:
 - а) $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$;
 - б) $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$?
4. Через каждую вершину четырёхугольника проведена прямая, проходящая через центр вписанной в него окружности. Три из этих прямых обладают тем свойством, что каждая из них делит площадь четырёхугольника на две равновеликие части.
 - а) Докажите, что и четвёртая прямая обладает тем же свойством.
 - б) Какие значения могут принимать углы этого четырёхугольника, если один из них равен 72° ?
5. Для каждого простого p найдите наибольшую натуральную степень числа $p!$, на которую делится число $(p^2)!$.
6. Докажите, что при любом разбиении ста «двузначных» чисел 00, 01, ..., 99 на две группы некоторые числа хотя бы одной группы можно записать в ряд так, чтобы любые два соседних числа этого ряда отличались друг от друга на 1, 10 или 11, и хотя бы в одном из двух разрядов (единиц или десятков) встречались все 10 различных цифр.