# Московская математическая олимпиада

## 10 класс, 2009 год

**1.** Через терминал оплаты на мобильный телефон можно перевести деньги, при этом взимается комиссия — целое положительное число процентов. Федя положил целое количество рублей на мобильный телефон, и его счёт пополнился на 847 рублей. Сколько денег положил на счёт Федя, если известно, что комиссия менее 30%?

**2.** Дана возрастающая бесконечная последовательность натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ такая, что каждый её член является либо средним арифметическим, либо средним геометрическим двух соседних. Обязательно ли с некоторого момента эта последовательность становится либо арифметической, либо геометрической прогрессией?

**3.** Квадрат разрезали на конечное число прямоугольников. Обязательно ли найдётся отрезок, соединяющий центры (точки пересечения диагоналей) двух прямоугольников, не имеющий общих точек ни с какими другими прямоугольниками, кроме этих двух?

**4.** На кольцо свободно нанизано 2009 бусинок. За один ход любую бусинку можно передвинуть так, чтобы она оказалась ровно посередине между двумя соседними. Существуют ли такие изначальная расстановка бусинок и последовательность ходов, при которых какая-то бусинка пройдёт хотя бы один полный круг?

**5.** Стороны $BC$ и $AC$ треугольника $ABC$ касаются соответствующих вневписанных окружностей в точках $A_1$, $B_1$. Пусть $A_2$, $B_2$ — ортоцентры треугольников $CAA_1$ и $CBB_1$. Докажите, что прямая $A_2B_2$ перпендикулярна биссектрисе угла $C$.

**6.** Докажите, что при любых натуральных $0 < k < m < n$ числа $C_n^k$ и $C_n^m$ не взаимно просты. ($C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — число способов выбрать $k$ элементов из $n$ различных элементов без учёта порядка.)