

**Механико-математический факультет МГУ****Письменный экзамен, 2010 год**

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^y = 4^x + 8, \\ y = \frac{x+1}{\log_2 x}. \end{cases}$$

$$\xi = \eta, \zeta = x$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1-x}{x} > \sqrt{\frac{3x-2}{3x+4}}.$$

$$\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right]$$

3. Найдите наименьшее из положительных значений функций

$$\frac{4}{3 \cos^2 x + 2 \sin x - 1}.$$

$$\frac{4}{21}$$

4. Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если известно, что  $\angle ABC = \frac{\pi}{12}$ ,  $BC = 5$ ,  $2AC > AB$ , медиана  $CD$  образует со стороной  $AC$  треугольника угол величиной  $\frac{5\pi}{12}$ .

$$\frac{4}{25}$$

5. Из лесу выскочил заяц и помчался по прямой в направлении тернового куста. На полпути до куста заяц напоролся на колючку и стал бежать в полтора раза медленнее. Когда зайцу оставалось до куста 50 метров, из лесу (из того же места) выбежал волк и погнался за зайцем. Когда заяц добежал до куста, волку оставалось до него 10 метров. На каком расстоянии от леса находится терновый куст, если известно, что волк всё время бежал со скоростью, с которой первоначально бежал заяц?

$$\pi 08$$

6. В основании параллелепипеда лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 1$  и  $BC = 4$ , боковые ребра  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  перпендикулярны основанию и равны 1. Сфера касается прямой  $DC_1$  в точке  $C_1$ , прямой  $DB_1$  в точке, лежащей внутри отрезка  $DB_1$ , и проходит через точку  $D_1$ . Найдите радиус сферы.

$$\frac{2}{9\sqrt{5}}$$