

Механико-математический факультет МГУ

Письменный экзамен, 2007 год

1. Учитель назвал Пете натуральное число и попросил найти сумму его логарифмов по основаниям 3 и 75. Однако Петя, по ошибке, не сложил эти логарифмы, а перемножил их, получив неверный ответ, который оказался вдвое меньше верного. Какое число назвал ему учитель?

51

2. Графики функций

$$f(x) = 2x^2 - 2x - 1 \quad \text{и} \quad g(x) = -5x^2 + 2x + 3$$

пересекаются в двух точках. Найти коэффициенты a и b в уравнении прямой $y = ax + b$, проходящей через те же точки.

$$\frac{b}{a} + x \frac{b}{a} = n$$

3. Решить уравнение

$$3 \cos x \cdot |3 \sin x + \cos x| = \sin x \cdot |\cos x - 3 \sin x|.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, ul + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \arctan x = ul + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \arctan \frac{x}{1} - \frac{x}{x} = x$$

4. Точки A, B, C лежат на окружности радиуса 2 с центром O , а точка K — на прямой, касающейся этой окружности в точке B , причем $\angle AKC = 46^\circ$, а длины отрезков AK, BK, CK образуют возрастающую геометрическую прогрессию (в указанном порядке). Найти угол AKO и расстояние между точками A и C . Какой из углов больше: ACK или AOK ?

$$23^\circ, 4 \sin 67^\circ, \text{ одинаковы}$$

5. Найти наибольшее значение выражения

$$\sqrt{(x-1)(y-x)} + \sqrt{(7-y)(1-x)} + \sqrt{(x-y)(y-7)}$$

при $x \in [-2; 3]$ и $y \in [0; 11]$.

3

6. Два конуса имеют общую вершину и единственную общую образующую, которая составляет с их осями углы в 30° и 45° . Двугранный угол расположен так, что каждая его грань касается каждого из конусов по разным образующим. Найти величину этого угла.

$$\frac{2}{3} \arccos \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$$