

## Механико-математический факультет МГУ

### Письменный экзамен, 2007 год

1. Учитель назвал Пете натуральное число и попросил найти сумму его логарифмов по основаниям 3 и 75. Однако Петя, по ошибке, не сложил эти логарифмы, а перемножил их, получив неверный ответ, который оказался вдвое меньше верного. Какое число назвал ему учитель?

51

2. Графики функций

$$f(x) = 2x^2 - 2x - 1 \quad \text{и} \quad g(x) = -5x^2 + 2x + 3$$

пересекаются в двух точках. Найти коэффициенты  $a$  и  $b$  в уравнении прямой  $y = ax + b$ , проходящей через те же точки.

$$\frac{b}{a} + x \frac{b}{a} = n$$

3. Решить уравнение

$$3 \cos x \cdot |3 \sin x + \cos x| = \sin x \cdot |\cos x - 3 \sin x|.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u + \frac{\pi}{\sqrt{13} + \sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{13} = u + \frac{\pi}{13} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{13} - \frac{\pi}{13} = x$$

4. Точки  $A, B, C$  лежат на окружности радиуса 2 с центром  $O$ , а точка  $K$  — на прямой, касающейся этой окружности в точке  $B$ , причем  $\angle AKC = 46^\circ$ , а длины отрезков  $AK, BK, CK$  образуют возрастающую геометрическую прогрессию (в указанном порядке). Найти угол  $AKO$  и расстояние между точками  $A$  и  $C$ . Какой из углов больше:  $ACK$  или  $AOK$ ?

$$23^\circ, 4 \sin 67^\circ, \text{одинаковы}$$

5. Найти наибольшее значение выражения

$$\sqrt{(x-1)(y-x)} + \sqrt{(7-y)(1-x)} + \sqrt{(x-y)(y-7)}$$

при  $x \in [-2; 3]$  и  $y \in [0; 11]$ .

3

6. Два конуса имеют общую вершину и единственную общую образующую, которая составляет с их осями углы в  $30^\circ$  и  $45^\circ$ . Двугранный угол расположен так, что каждая его грань касается каждого из конусов по разным образующим. Найти величину этого угла.

$$\frac{2}{3} \arccos \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$$