Механико-математический факультет МГУ

Письменный экзамен, 2006 год

1. Игорь и Володя решали задачу: некоторое заданное трёхзначное число прологарифмировать по основанию 2, из полученного числа вычесть некоторое заданное натуральное число, а затем разность разделить на то же самое натуральное число. Игорь перепутал и в первом действии прологарифмировал по основанию 3, а Володя посчитал правильно. Когда они сверили свои результаты, оказалось, что полученные ими числа взаимно обратны. Найти исходное трёхзначное число.

$\boxed{216}$

2. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{1+3^{-x}}}{\sqrt{1+3^{-x}}-\sqrt{1-3^{-x}}}-\frac{3^{-x}-1}{\sqrt{1-9^{-x}}+3^{-x}-1}\geqslant\frac{1+\sqrt{1-9^{-x}}}{3^{-x}}.$$

$\boxed{(0;\infty)}$

3. Две сферы касаются друг друга внешним образом. Радиус одной сферы в три раза больше радиуса другой. Скрещивающиеся прямые a и b параллельны некоторой плоскости, проходящей через центры сфер. Каждая из прямых a и b касается обеих сфер, а расстояние между этими прямыми равно диаметру меньшей сферы. Найти угол между прямыми a и b.

$\boxed{90^\circ}$

4. Решить уравнение:

$$|1-2\sin x+\cos x|+2\sin x+1=\cos 2x.$$

$\boxed{\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$

5. Отрезок KB является биссектрисой треугольника KLM. Окружность радиусом 5 проходит через вершину K, касается стороны LM в точке B и пересекает сторону KL в точке A. Найти угол K и площадь треугольника KLM, если $ML=9\sqrt{3}$, $KA:LB=5:6$.

$\boxed{60^\circ,\ \frac{405\sqrt{3}}{16}}$

6. Найти минимальное значение выражения

$$|2x-y-1|+|x+y|+|y|,$$

где x и y — произвольные действительные числа.

$\boxed{\frac{1}{3}}$