

Механико-математический факультет МГУ

Письменный экзамен, 2005 год

1. Согласно расписанию, автобус курсирует по маршруту из пункта A в пункт B и обратно с постоянной скоростью и без остановок. На пути из A в B он был вынужден на некоторое время остановиться, поэтому на обратном пути увеличил скорость на 25%. Приехав в A с 10-минутным отклонением от расписания, он уменьшил свою последнюю скорость на 24% и прибыл в B вовремя. Какова была продолжительность вынужденной остановки?

28 мин

2. Найти $\log_2 \frac{2x}{2^x}$ при условии

$$|\log_{\sqrt{2}} x^{x/2} - 2 \log_2 x| + ||2 - x| - |\log_2 x|| \leq (x - 2) \log_8 x^3.$$

1-

3. Решить неравенство

$$\frac{3 - x - \sqrt{5 - x^2}}{\cos \frac{2x-7}{4} - \cos \frac{x-5}{4}} \geq 0.$$

$\frac{5}{2} \leq x < 2, 2 > x \geq 1$

4. На основании BC трапеции $ABCD$ взята точка E , лежащая на одной окружности с точками A , C и D . Другая окружность, проходящая через точки A , B и C , касается прямой CD . Найти BC , если $AB = 12$ и $BE : EC = 4 : 5$. Найти все возможные значения отношения радиуса первой окружности к радиусу второй при данных условиях.

$(\frac{8}{9}; 1) \cap (1; \frac{8}{7}]$, 81

5. Пусть X — сумма корней уравнения

$$a \cos x = \sqrt{2} + 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$$

на промежутке $[0; 2\pi)$, а Y — сумма корней уравнения

$$a \cos 2y - 2 \sin 2y = a - 3 \sin y$$

на том же промежутке. Найти все значения a , при которых $\operatorname{ctg} \frac{X-Y}{2} = \sqrt{3}$.

$0, 4 + 2\sqrt{3}$

6. Найти объем тетраэдра $ABCD$ с ребрами $AB = 3$, $AC = 5$ и $BD = 7$, если расстояние между серединами M и N его ребер AB и CD равно 2, а прямая AB образует равные углы с прямыми AC , BD и MN .

$4\sqrt{6}$