Механико-математический факультет МГУ

Письменный экзамен, 2003 год (июль)

1. Решить неравенство

$$5\sqrt{\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}}+4\sqrt{\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}}\leqslant 9\sqrt{x+4}.$$

$\boxed{-3}$

2. Решить уравнение

$$\left|5^{\log_x 122}-x^{\log_5 x}+614\right|=636-5^{\log_x 122}-x^{\log_5 x}.$$

$\boxed{\frac{1}{25}}$

3. Первый член конечной геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем q меньше последнего, но не более чем на 17, а сумма ее членов со второго по последний не меньше 26. Найти q.

$\boxed{2}$

4. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямой BC, а через вершины B и C — другая окружность, касающаяся прямой AB. Продолжение общей хорды BD этих окружностей пересекает отрезок AC в точке E, а продолжение хорды AD одной окружности пересекает другую окружность в точке F. Найти отношение $AE : EC$, если $AB = 5$ и $BC = 9$. Сравнить площади треугольника ABC и ABF.

$\boxed{25 : 81;\ \text{одинаковы}}$

5. Найти значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin\arccos(5x) = a + \arcsin\sin(7x-3)$$

имеет единственное решение.

$\boxed{a=\pi-3+\frac{\sqrt{74}}{5},\ \pi-3-\frac{7}{5}\leqslant a\pi-3+\frac{7}{5}}$

6. Высота AH тетраэдра $ABCD$ пересекается с его высотой BE, но не лежит в одной плоскости ни с одной из других его высот. На отрезке $HE = 4$ взята точка O, равноудаленная от граней тетраэдра, образующая двугранный угол в 30° при ребре $CD = 5$. Найти площадь сечения тетраэдра, проходящего через точку O и являющегося прямоугольником.

$\boxed{10\left(2-\sqrt{3}\right)}$