

Механико-математический факультет МГУ

Олимпиада «Абитуриент-2002», май

1. Найти дроби

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} \quad \text{и} \quad \frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)},$$

если числа α , β и γ выбраны так, что обе дроби положительны и одна из них втрое больше другой.

$\frac{3}{2}; 2$

2. Решить неравенство

$$\sqrt[3]{2x - x\sqrt{x} - 1} + \sqrt{x} + \sqrt[3]{1 - 2x} \leq 0.$$

$(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}+1}] \cap [1; \frac{2}{3}] \cap \{0\}$

3. Точка M лежит на боковой стороне CD трапеции $ABCD$. Известно, что

$$\angle BCD = \angle CBD = \angle ABM = \arccos \frac{5}{6}$$

и $AB = 9$. Найти BM .

$\frac{15}{4}$

4. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{a+1} x + \log_x(19 - 8a) = 2$$

имеет по крайней мере два корня и при этом произведение всех его корней не меньше 0,01.

$(\frac{8}{61}; \frac{1}{8}) \cap (\frac{1}{8}; 2) \cap (0; \frac{01}{8} -]$

5. Сфера отсекает на ребрах AB , CB , AS и CS треугольной пирамиды $SABC$ равные отрезки KL , NM , K_1L_1 и N_1M_1 соответственно (точки K и K_1 лежат ближе к A , чем L и L_1 , а точки N и N_1 лежат ближе к C , чем M и M_1). Известно, что $MM_1 = 2KK_1$ и $2KN = 3L_1M_1$, $\angle SBA = \angle SBC$ и $\angle KK_1N_1 = 90^\circ$. Найти отношение объемов пирамид $SABC$ и M_1KLMN .

$\frac{32}{5}$

6. Найти все значения x , для которых оба числа $\frac{x^2+4x-1}{7x^2-6x-5}$ и $\frac{1-x}{1+x}$ являются целыми.

$\frac{1}{3} - ; \frac{2}{1} - ; \frac{3}{1} - ; 1$